分 类 号：______ UDC：______

学 号：11109822149 密级：公开

温州大学

硕士学位论文

一类三维非牛顿流方程组的轨道吸引子

作者姓名：吴鹤灵

学科、专业：应用数学

研究方向：微分方程与生物数学

指导教师：赵才地 副教授

完成日期：2014年3月

温州大学学位委员会

温州大学学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得温州大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

论文作者签名：吴鹤灵　　　　日期：2014年5月27日

温州大学学位论文使用授权声明

本人完全了解温州大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权温州大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。本人在导师指导下完成的论文成果，知识产权归属温州大学。

保密论文在解密后遵守此规定。

论文作者签名：吴鹤灵　　　　导师签名：[illegible]

日期：2014年5月27日　　　　日期：2014年5月27日

分 类 号：__________　　　　　　UDC：__________

学　　号：11109822149　　　　　　密级：　公开　

温州大学

硕 士 学 位 论 文

一类三维非牛顿流方程组的轨道吸引子

作 者 姓 名：**吴鹤灵**

学科、专业：**应用数学**

研 究 方 向：**微分方程与生物数学**

指 导 教 师：**赵才地　副教授**

完 成 日 期：**2014年3月**

温州大学学位委员会

一类三维非牛顿流方程组的轨道吸引子

摘　要

本硕士论文主要研究一类不可压非牛顿流方程组在三维有界区域上解的轨道渐近行为. 论文安排如下:

第一章首先简要介绍无穷维动力系统的起源和研究现状, 然后介绍非牛顿流体力学方程组的物理背景和本文的主要研究内容.

第二章研究自治的三维不可压非牛顿流方程组的轨道吸引子的存在性. 为此, 我们构造由方程组的满足一定条件的所有弱解形成的轨道空间, 并引入作用在此轨道空间上的自然平移半群. 然后我们证明半群在轨道空间中存在有界吸收集. 最后我们分别证明轨道空间和有界吸收集在适当拓扑空间中的封闭性和紧性.

第三章讨论非自治的三维不可压非牛顿流方程组解的轨道渐近行为. 首先, 我们证明非自治的三维不可压非牛顿流方程组在拓扑空间Θ_+^{loc}中存在一致轨道吸引子$\mathcal{A}_\Sigma$. 然后, 我们证明它在具有更高正则性的拓扑空间Ξ_+^{loc}中也存在一致轨道吸引子$\mathcal{U}_\Sigma$(称为一致正则轨道吸引子). 最后, 我们通过证明$\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma$来揭示一致轨道吸引子的正则性.

第四章是论文小结.

关键词: 非牛顿流, 拓扑空间, 轨道吸引子, 一致轨道吸引子, 正则性

TRAJECTORY ATTRACTOR OF A 3D NON-NEWTONIAN FLUID EQUATIONS

ABSTRACT

This thesis mainly studies the trajectory asymptotic behavior of an incompressible non-Newtonian fluid in 3D bounded domains. The paper is organized as follows.

In chapter 1, we recall the origin of the infinite dimensional dynamical system and introduce the physical background of the non- Newtonian fluid, as well as the issues we will study in this thesis.

In chapter 2, we investigate the existence of the trajectory attractor for the 3D autonomous incompressible non-Newtonian fluid. We first construct the trajectory space which consists of all the weak solutions satisfying some conditions of the non-Newtonian fluid and introduce the translation semigroup acting on it. Then we prove that the translation semigroup possesses a bounded trajectory absorbing set in trajectory space. Further, we establish the closedness of the trajectory space and the compactness of the trajectory absorbing set in suitable topological space, respectively.

In Chapter 3, we verify the trajectory asymptotic behavior of the 3D non-autonomous incompressible non-Newtonian fluid. Firstly, we prove the existence of the uniform trajectory attractor $\mathcal{A}_\Sigma$ in space $\mathcal{F}_+^{loc}$, as well the existence of the uniform trajectory attractor $\mathcal{U}_\Sigma$(called the uniform regular trajectory attractor)in space $\mathcal{M}_+^{loc}$ (possessing more regularity). Then we establish the regularity of the uniform trajectory attractor by showing that $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma$.

In the last chapter, we give some conclusions and remarks.

KEY WORDS: Incompressible non-Newtonian fluid, Topological space, Trajectory attractor, Uniform trajectory attractor, Regularity

目　录

第一章 引 言

1.1 无穷维动力系统

十九世纪末, 法国数学家Poincaré在研究天体力学时, 提出了微分方程定性理论, 其主要思想是不求出方程的解而直接研究解的性态, 这成为动力系统理论发展的开端. 数学家Lyapunov, Birkhoof以及Arnold和Smale相继对动力系统理论作出了富有开创性的工作. 在20世纪初期出版的Birkhoff的名著《Dynamical Systems》之后, 动力系统便迅速发展了起来. 由于动力系统与实际应用如流体力学, 化学工程, 生物学, 生态学和地球物理学等的广泛联系, 现已拥有微分动力系统, 拓扑动力系统, 复杂动力系统, 随机动力系统等多个分支系统.

物理学中具有孤立子的非线性演化方程, 在一定的耗散作用下, 从孤立子演化到混沌现象; 流体力学中的湍流问题, 这些使得动力系统对问题的研究不再仅限于有限维情形, 还有无穷维情形. 动力系统按空间与时间变量之间的依赖性可分为自治动力系统和非自治动力系统. 在无穷维动力系统理论(参考 [11, 20, 26, 27, 29])中, 通常用吸引子来研究动力系统的动力行为. 一般情况下, 整体吸引子描述自治动力系统的动力学行为. 整体吸引子是状态空间中吸引所有轨道的最大有界不变集, 具有吸引性, 它刻画了自治系统的整体特征和全局行为. 整体吸引子如果存在, 则是唯一的. 但是, 经典的整体吸引子理论一般只适用于解存在且唯一的自治问题. 当解存在但不唯一时, 人们提出了轨道吸引子和多值动力系统如多值半群, 多值半过程, 多值半流. 对于非自治动力系统, 人们通常用轨道吸引子, 一致吸引子和核截面 [11]等描述它们的动力学行为.

数学流体力学广泛应用于物理学, 大气与海洋科学及航空工业等领域中. 流体的运动可以由偏微分方程组来描述. 我们可以用无穷维动力系统理论来研究流体的动力行为. 本论文将用无穷维动力系统理论研究非牛顿流方程组解的轨道渐近行为, 主要包括自治情形下轨道吸引子的存在性, 非自治情形下一致轨道吸引子的存在性及正则性.

1.2 非牛顿流体和本文的选题与主要工作

在流体动力学理论中, n维空间中不可压缩的流体的运动可以用下面的偏微分方程组描述 [23],

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla\cdot\mathbb{T}(e(u))=g(x,t), \tag{1-1}$$

$$\nabla\cdot u=0, \tag{1-2}$$

其中$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$表示流体的速度场, $\nabla=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\cdots,\partial/\partial x_n)$是梯度算子, $g(x,t)$表示外力函数; $e(u)=(e_{ij}(u))_{n\times n}$是流体的应变速率张量, $e_{ij}(u)$具有如下形式

$$e_{ij}(u):=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}),\ \ i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1-3}$$

$\mathbb{T}(e(u))=\mathbb{T}_{ij}(e(u))_{n\times n}$ 称为流体的本构关系 [21], 是由n阶方阵$\mathbb{M}_{n\times n}$组成的集合上的一个变换, 其中

$$\mathbb{T}_{ij}(e(u))=p\delta_{ij}-\mathbb{T}^u_{ij}(e(u)),\ \ i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1-4}$$

在(1-4)中, 标量函数p代表压力; 若$i\neq j$, 则$\delta_{ij}=0$, 否则$\delta_{ij}=1$; $\mathbb{T}^u_{ij}(e(u)):\mathbb{M}_{n\times n}\longmapsto\mathbb{R}$ 是$e(u)$的函数, 称为流体的应力张量. $\nabla\cdot u=0$描述了流体的不可压缩性.

根据本构关系, 不可压缩流体分为两种: 牛顿流和非牛顿流. 如果应力张量$\mathbb{T}^u=(\mathbb{T}^u_{ij})_{n\times n}$ 线性地依赖于应变速率张量$e(u)$, 例如,

$$\mathbb{T}^u(e)=2\nu e,\ \ \text{其中}\nu\text{是正参数}, \tag{1-5}$$

那么对应的流体满足斯托克斯定律([23, p.13]), 我们称它为牛顿流. 一般来说, 气体, 水, 酒精, 电机油以及一些简单的碳氢化合物是牛顿流, 它们的运动可以用Navier-Stokes (NS) 方程来描述. 反之, 如果应力张量与应变速率张量的关系是非线性的, 则流体称为非牛顿流. 例如, 熔化的塑料, 聚合体, 油漆, 涂料等物质的流动趋于非牛顿流.

在三维空间中, 对于一类不可压缩的非牛顿流体, 文献 [3]的作者引入了下面的本构关系:

$$\mathbb{T}_{ij}(e(u))=-p\delta_{ij}+2\mu_0(\varepsilon+|e(u)|^2)^{-\alpha/2}e_{ij}-2\mu_1\Delta e_{ij},\ \ i,j=1,2,3, \tag{1-6}$$

其中$\varepsilon,\mu_0,\mu_1,\alpha$ 是正参数,

$$|e(u)|^2:=\sum_{i,j=1}^{3}|e_{ij}(u)|^2. \tag{1-7}$$

记

$$\mu(u):=2\mu_0(\varepsilon+|e(u)|^2)^{-\alpha/2}. \tag{1-8}$$

由关系式(1-3), (1-6)和(1-8), 我们得到描述一类非牛顿流方程组(1-1)-(1-2)的等价形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u-\nabla\cdot\big(\mu(u)e(u)-2\mu_1\Delta e(u)\big)+\nabla p=g(x,t), \tag{1-9}$$

$$\nabla\cdot u=0. \tag{1-10}$$

上述流体也叫双极流体, 是被Nečas 等作为一种正规的p-流体引入的 [3].

非牛顿流在现实世界中有着广泛应用, 已受到国内外许多数学家和物理学家的研究. 现在已有许多文献讨论了非牛顿流方程组(1-9)-(1-10)的初边值等相关问题解的存在性, 正则性以及长时间性态(e.g. [2, 6, 14–18, 23, 25, 33, 35, 42],). 例如, 文 [6]证明了在二维无界区域上解的存在性与唯一性; 文 [16]证明了弱解的偏正则性; 文 [25]研究了它的柯西问题. 文 [5, 22, 36–41] 研究了吸引子的存在性, 正则性及相关性质.

方程组(1-9)-(1-10)的初边值问题可描述如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \big(\mu(u)e(u) - 2\mu_1 \Delta e(u)\big) + \nabla p = g(x,t),\ x \in \Omega, \tag{1-11}$$

$$\nabla \cdot u = 0,\ x \in \Omega \tag{1-12}$$

$$u = 0,\ \ \mathbb{T}_{ijl}\mathbf{n}_j\mathbf{n}_l = 0,\ \ i,j,l = 1,2,3,\ \ x \in \partial\Omega, \tag{1-13}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{1-14}$$

其中, $t > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$是有界光滑区域. $\mathbb{T}_{ijl} := 2\mu_1 \cdot \partial e_{ij}/\partial x_l$, $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \vec{\mathbf{n}}$ 表示边界$\partial\Omega$的单位外法向量. 方程(1-13)中的第一个条件表示流体在边界上没有滑溜, 第二个条件表示流体的牵引力在边界$\partial\Omega$上消失. 关于方程组(1-11)-(1-14) 的详细物理背景, 可以参考文献 [6].

我们知道, 当$\alpha > 0$时, 方程组(1-11)-(1-14)的弱解可能不唯一, 甚至是在二维的情形下([6, 39]). 对于这种弱解存在但可能不唯一的方程(组), 人们一般有三种途径来研究其解的渐近行为. 第一种是文 [4] 中的广义半流. 第二种是多值动力系统, 可以参考关于多值半流的文 [13, 19, 24], 关于多值过程(或半过程)的文献 [8, 9, 28, 32], 关于多值随机动力系统的文献 [7, 12]. 第三种是轨道吸引子. 轨道吸引子最初是为了研究三维不可压N-S方程的弱解的渐近行为而提出的(例如见 [10, 11, 30]). 后来, 轨道吸引子已被成功用于描述其它一些解存在但可能不唯一的微分方程的解的渐近行为(例如 [34, 39]).

本文第二章应用上面提到的第三种方法证明方程组(1-11)-(1-14) 在自治情形下轨道吸引的存在性. 为此, 我们构造由该方程组(1-11)-(1-14)的满足一定条件的所有弱解形成的轨道空间$\mathcal{T}^+$, 并引入作用在$\mathcal{T}^+$上的自然平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. 然后我们证明半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在轨道空间$\mathcal{T}^+$中存在有界吸收集$\mathcal{P}$. 之后我们证明轨道空间$\mathcal{T}^+$在拓扑空间Θ_+^{loc}(Θ_+^{loc}空间的定义见§2.3)中是闭集以及$\mathcal{P}$在拓扑空间Θ_+^{loc}中是紧集, 从而得到轨道吸引子的存在性.

本文第三章研究方程组(1-11)-(1-14)的解在非自治情形下的轨道渐近行为. 本章主要有两个结果, 一个结果是作用在一致轨道空间$\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$上的平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$存在一致(关于$g \in \Sigma$)轨道吸引子$\mathcal{A}_\Sigma \subseteq \mathcal{F}_+^{loc}$ ($\mathcal{F}_+^{loc}$空间的定义见§2.3). 而且, 在具有更高正则性的空间$\mathcal{M}_+^{loc}$($\mathcal{M}_+^{loc}$空间的定义见§3.3)中也存在一致(关

于$g \in \Sigma$)轨道吸引子$\mathcal{U}_\Sigma$(称为一致正则轨道吸引子). 另一个结果是:

$$\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{U}_\Sigma. \tag{1-15}$$

对于非牛顿流方程组(1-11)-(1-14), (1-15)表明一致轨道吸引子的存在性不依赖于能量空间的选取, 而且它反映了非牛顿流方程组(1-11)-(1-14) 解的轨道渐近光滑效应: 以$u_0 \in \mathcal{F}_+^{loc}$ 为初值的解在相应半群的作用下, 经过充分长的时间之后进入到$\mathcal{M}_+^{loc}$(比$\mathcal{F}_+^{loc}$ 具有更高的正则性)中, 即解(属于空间$\mathcal{M}_+^{loc}$) 在相应半群的作用下变得比初值(属于空间$\mathcal{F}_+^{loc}$) 更光滑.

第二章　自治的三维不可压非牛顿流方程组的轨道吸引子

2.1　引言

本章讨论下面自治的不可压非牛顿流方程组在三维有界区域上轨道吸引子的存在性:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nabla\cdot\big(\mu(u)e(u) - 2\mu_1\Delta e(u)\big) + \nabla p = g(x),\ x\in\Omega, \tag{2-1}$$

$$\nabla\cdot u = 0,\ x\in\Omega \tag{2-2}$$

$$u = 0,\ \ \mathbb{T}_{ijl}\mathbf{n}_j\mathbf{n}_l = 0,\ \ i,j,l = 1,2,3,\ \ x\in\partial\Omega, \tag{2-3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x\in\Omega, \tag{2-4}$$

该方程组的物理意义和它在国际上的研究概况已在§1.2中介绍.

本章中, 我们假设参数μ_0, μ_1, ε, α 都是正的. 此时, 与三维不可压N-S方程相似, 方程组(2-1)-(2-4) 在三维有界区域上存在整体弱解, 但弱解的唯一性尚得不到证明. 此时我们用§1.2中提到的轨道吸引子来描述方程组(2-1)-(2-4)的解的渐近行为, 主要证明轨道吸引子$\mathcal{A}^{\mathrm{tr}}$的存在性. 为此, 首先我们构造由方程组(2-1)-(2-4)的满足一定条件的弱解形成的轨道空间$\mathcal{T}^+$, 并考虑作用在$\mathcal{T}^+$上的自然平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. 然后我们证明半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在轨道空间$\mathcal{T}^+$中存在有界吸收集$\mathcal{P}$. 最后我们分别证明轨道空间$\mathcal{T}^+$和有界吸收集$\mathcal{P}$ 在拓扑空间Θ_+^{loc}(具体定义形式见§2.3)中的封闭性和紧性. 从而, 根据文 [31]或 [11]中的经典结论我们得到轨道吸引子的存在性.

这里需要提到的是文献 [10, 11, 30]证明了三维不可压N-S方程轨道吸引子的存在性. 与N-S方程相比, 本文讨论的不可压非牛顿流体方程(2-1)中含有高阶导数项$\nabla\cdot 2\mu_1\Delta e_{ij}$和非线性项$\nabla\cdot(2\mu_0(\varepsilon+|e|^2)^{-\alpha/2}e_{ij}$. 该非线性项在我们求弱解在轨道空间$\mathcal{T}^+$ 中的的估计及证明轨道空间$\mathcal{T}^+$关于拓扑Θ_+^{loc}的封闭性时带来一定困难. 另外, 我们想指出的是, 文 [39] 证明了方程组(2-1)-(2-4)在二维有界区域上轨道吸引子的存在性. 与文 [39]相比较, 本章在更一般的拓扑空间Θ_+^{loc} 中讨论该方程组的轨道吸引子的存在性, 且本章的方法可用来研究该方程组在二维有界光滑区域上轨道吸引子的存在性, 得到与本章类似的结果. 因此, 就二维有界区域而言, 可以由本章结果推出文 [39]的结果(具体见 §2.5 本章小结与说明).

2.2　预备知识

在本论文中我们分别用$\mathbb{R}$和$\mathbb{N}$表示实数集和正整数集. $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$. 我们

用c表示常数, 并允许其在不同地方取不同值. 我们用$\mathbb{L}^p(\Omega)$表示Lebesgue空间, 其范数定义为$|\cdot|_p$(例如见 [1]). $W^{m,p}(\Omega)$表示Sobolev空间, 其范数为$|\cdot|_{m,p}$(例如见 [1]). 其中

$$|\varphi|_p := (\int_\Omega |\varphi|^p \mathrm{d}x)^{1/p} \quad 和 \quad |\varphi|_{m,p} := (\sum_{|\beta|\leqslant m} \int_\Omega |D^\beta \varphi|^p \mathrm{d}x)^{1/p}.$$

那么$\mathbb{L}^p(\Omega) := (L^p(\Omega))^3$和$\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) := (W^{m,p}(\Omega))^3$ 分别表示三维Lebesgue空间和三维Sobolev空间, 它们的范数分别为$\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$ 与 $\|\cdot\|_{m,p}$, 具体形式如下

$$\|\varphi\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} := (|\varphi_1|_p^p + |\varphi_2|_p^p + |\varphi_3|_p^p)^{1/p}, \qquad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{L}^p(\Omega);$$
$$\|\varphi\|_{m,p} := (|\varphi_1|_{m,p}^p + |\varphi_2|_{m,p}^p + |\varphi_3|_{m,p}^p)^{1/p}, \qquad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{W}^{m,p}(\Omega).$$

特别地, 我们记$\|\cdot\| := \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$, $\mathbb{H}^m(\Omega) := \mathbb{W}^{m,2}(\Omega)$. $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$表示集合 $\{\varphi|\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$在空间$\mathbb{H}^1(\Omega)$中取闭包.下面引入空间

$$\mathcal{V} := \{\varphi|\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \nabla \cdot \varphi = 0\}.$$

H和V分别表示$\mathcal{V}$在空间$\mathbb{L}^2(\Omega)$和空间$\mathbb{H}^2(\Omega)$中取的闭包. 它们的范数分别为$\|\cdot\|_H := \|\cdot\|$和$\|\cdot\|_V := \|\cdot\|_{2,2}$, 对偶空间分别为$H'$和$V'$.

根据上面相关定义, 我们进一步引入下面这些空间:

$L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ 表示从$\mathbb{R}$ 到H 的局部平方可积的函数空间. $L^2_b(\mathbb{R}; H)$ 表示下面的函数集合

$$\{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)| \ \|f\|^2_{L^2_b} = \|f\|^2_{L^2_b(\mathbb{R};H)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 \mathrm{d}s < +\infty\}.$$

$L^p(I; E)$ 表示由区间I上强可测的且函数值在巴拿赫空间E中的函数构成的函数空间, 其范数定义为

$$\|\varphi\|_{L^p(I;E)} := \Big(\int_I \|\varphi\|_E^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p}, \quad \text{for } 1 \leqslant p < \infty. \tag{2-5}$$

$\mathcal{C}(I; E)$是区间I上的函数值在巴拿赫空间E中的连续函数构成的函数空间. $\mathrm{dist}_E(Y, Z) = \sup_{y\in Y} \inf_{z\in Z} \mathrm{dist}_E(y, z)$ 表示巴拿赫空间E中从集合$Y \subseteq E$到集合$Z \subseteq E$的Hausdorff半距离.

$(\cdot,\cdot)$表示H或者$\mathbb{L}^2(\Omega)$ 中的内积, $\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$V$与$V'$的对偶积. 下面我们引入三个

算子:

$$\langle Au, v\rangle := \sum_{i,j,k=1}^{3}\int_{\Omega}\frac{\partial e_{ij}(u)}{\partial x_k}\frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_k}\mathrm{d}x,\ \ \forall u,\ v\in V, \tag{2-6}$$

$$b(u,v,w) := \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega} u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\,\mathrm{d}x,\ \ \forall u,\ v,\ w\in V, \tag{2-7}$$

$$\langle N(u), v\rangle := \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\mu(u)e_{ij}(u)e_{ij}(v)\,\mathrm{d}x,\ \ \forall u,\ v\in V. \tag{2-8}$$

对于任意$u\in V$, 记

$$\langle B(u), w\rangle := b(u,u,w),\ \ \forall w\in V. \tag{2-9}$$

由上面的定义我们知道A是一个从V到V'或者从$D(A) := V\cap\mathbb{H}^4(\Omega)$ 到 H 的线性连续算子. 同样地, $B(u)$, $N(u)$也是从V到V'的连续算子. 而且, 当$u\in D(A)$时, 算子$N(u)$可以通过

$$\langle N(u), v\rangle = -\int_{\Omega}\{\nabla\cdot[\mu(u)e(u)]\}\cdot v\,\mathrm{d}x,\ \ \forall v\in H \tag{2-10}$$

延展到空间H上.

在文 [6,38,41]中已经证明了算子A, $B(u)$, $N(u)$的一些估计和性质. 我们把这些性质列出如下:

引理 2.2.1　存在只依赖于Ω的正常数c_i $(i=1,2,3)$使得

$$c_1\|u\|_V^2 \leqslant \langle Au, u\rangle \leqslant \|u\|_V^2,\ \ \forall u\in V, \tag{2-11}$$

$$|\langle Au, v\rangle| \leqslant c_2\|u\|_V\|v\|_V,\ \ \forall u,\ v\in V, \tag{2-12}$$

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v),\ \ b(u,v,v)=0,\ \ \forall u,v,w\in V, \tag{2-13}$$

$$|\langle N(u), v\rangle| \leqslant c_3\|u\|_V\|v\|_V,\ \forall u,v\in V. \tag{2-14}$$

根据算子A, $B(u)$, $N(u)$的定义, 我们得到方程组(2-1)-(2-4)在零散度场中弱的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu_1 Au + B(u) + N(u) = g,\ \ t>0, \tag{2-15}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{2-16}$$

其中(2-15)是在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$下成立.

定义 2.2.2　如果函数$u\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$, 并且$u$以及它的导数$\partial_t u$在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$下满足方程(2-15), 则称函数$u$ 为方程 (2-15)在区间$(0,T)$上的一个弱解.

引理 2.2.3 对任意$g \in V'$, $u_0 \in H$, 问题(2-15)-(2-16)至少存在一个定义在区间$[0,T]$上的弱解$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, 并且$u$在下面意义下

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \|u(s)\|^2 \phi'(s)\mathrm{d}s + 2\mu_1 \int_0^T \langle Au(s), u(s)\rangle \phi(s)\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^T \langle N(u(s)), u(s)\rangle \phi(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^T \langle u(s), g\rangle \phi(s)\mathrm{d}s \tag{2-17}$$

满足能量不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(s)\|^2 + 2\mu_1 \langle Au(s), u(s)\rangle + \langle N(u(s)), u(s)\rangle \leqslant \langle u(s), g\rangle, \tag{2-18}$$

其中$\forall\, s \in (0,T)$, $\forall\, \phi(s) \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$, $\phi(s) \geqslant 0$.

我们可以用Galerkin方法得到问题(2-15)-(2-16) 的满足能量不等式(2-18)的弱解. 证明过程与文 [6]相似, 在此略去.

下面的两个引理在文后的证明中起重要作用.

引理 2.2.4 ([11])设Y是Banach空间, $E \subset E_0 \subset Y$, 且$E \hookrightarrow E_0$是紧嵌入. 记

$$W_{p,q}(0,T;E,Y) = \{\phi(t), t \in [0,T] \mid \phi(t) \in L^p(0,T;E),\ \phi'(t) \in L^q(0,T;Y)\},$$

其中$p \geqslant 1$, $q > 1$, 在$W_{p,q}(0,T;E,Y)$中定义范数为

$$\|\phi\|_{W_{p,q}} = \Big(\int_0^T \|\phi(s)\|_E^p \mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_0^T \|\phi'(s)\|_Y^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

则$W_{p,q}(0,T;E,Y) \hookrightarrow L^p(0,T;E_0)$是紧嵌入. 当$p = +\infty$ 时, $W_{\infty,q}(0,T;E,Y) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];E_0)$也是紧嵌入.

引理 2.2.5 ([11]) 设$y(s), K(s) \in L^1_{loc}(0,+\infty)$ 且

$$-\int_0^{+\infty} y(s)\psi'(s)\mathrm{d}s + \beta \int_0^{+\infty} y(s)\psi(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^{+\infty} K(s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{2-19}$$

对任意的$\psi(s) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi(s) \geqslant 0$ 成立, 其中$\beta \in \mathbb{R}$, 则对任意的$t, \tau \in \mathbb{R}_+$, $t \geqslant \tau$ 有

$$y(t)\mathrm{e}^{\beta t} - y(\tau)\mathrm{e}^{\beta\tau} \leqslant \int_\tau^t K(s)\mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}s. \tag{2-20}$$

2.3 轨道空间及其性质

为了描述方程(2-15)的轨道, 我们引入时间t在$\mathbb{R}_+$上的限制算子Π_+. 类似地, $\Pi_T u(\cdot)$表示区间$[0,T]$上的限制算子. 例如, 如果$u(\cdot)\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V)$, 那么$\Pi_T u(\cdot)\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$; 如果$t\in[0,T]$, 则$\Pi_T u(t)=u(t)$.

定义 2.3.1　如果函数$u\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V)$, 且对任意$T>0$, $\Pi_T u$ 是方程(2-15)在区间$(0,T)$上的一个弱解, 并满足能量不等式(2-18), 则称函数u为方程(2-15) 的一条轨道. 方程(2-15)的所有轨道构成的集合称为它的轨道空间, 记作$\mathcal{T}^+$.

在轨道空间 $\mathcal{T}^+$ 上定义平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$:

$$S(t)u(\cdot)=u(t+\cdot),\quad u(\cdot)\in\mathcal{T}^+,\forall t\geqslant 0. \tag{2-21}$$

引理 2.3.2　(i) 设$g\in V'$, 则对任意$u_0\in H$, 初值问题(2-15)-(2-16) 至少存在一条轨道(可能不唯一) $u\in\mathcal{T}^+$.

(ii) 轨道空间在平移半群$\{S(t)\}_{t\geq 0}$作用下具有正不变性:

$$S(t)\mathcal{T}^+\subseteq\mathcal{T}^+,\ \forall t\geqslant 0. \tag{2-22}$$

证明. 结论(i)可以直接由引理 2.2.3 得到. 下证(ii). 事实上, 如果$u(s)\in\mathcal{T}^+$, 则由于(2-15) 是自治方程, 对任意$t\geqslant 0$, $T(t)u(s)=u(t+s)$, 显然是方程(2-15)的一个弱解, 且与$u(s)$一样, $u(t+s)$也满足能量不等式(2-18). □

引理 2.3.3　如果$u\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$, 则

$$t\longmapsto Au(t)\in L^{4/3}(0,T;V'), \tag{2-23}$$

$$t\longmapsto B(u(t))\in L^{4/3}(0,T;V'), \tag{2-24}$$

$$t\longmapsto N(u(t))\in L^{4/3}(0,T;V'). \tag{2-25}$$

证明. 对任意$t\in[0,T]$, 由§2.2中算子的定义知$Au(t)$, $B(u(t))$和$N(u(t))$均属于V', 且函数$t\longmapsto Au(t)$, $t\longmapsto B(u(t))$, $t\longmapsto N(u(t))$的可测性不难验证. 现对任意$\phi\in V$, 由算子A的定义, 空间V及其范数的定义得

$$|\langle Au,\phi\rangle|\leqslant\sum_{i,j,k=1}^{3}\int_\Omega\Big|\frac{\partial e_{ij}(u)}{\partial x_k}\frac{\partial e_{ij}(\phi)}{\partial x_k}\Big|\mathrm{d}x\leqslant c\|u\|_V\|\phi\|_V. \tag{2-26}$$

同时, 应用Hölder不等式和Gagliardo-Nirenberg不等式得

$$|\langle B(u),\phi\rangle|\leqslant\|u\|^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla\phi\|\leqslant c\|u\|^{1/2}\|u\|_V^{3/2}\|\phi\|_V, \tag{2-27}$$

$$\begin{aligned}|\langle N(u),\phi\rangle|&=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega|\mu(u)e_{ij}(u)e_{ij}(\phi)|\mathrm{d}x\\&\leqslant c\|\Delta u\|\|\Delta\phi\|\leqslant c\|u\|_V\|\phi\|_V.\end{aligned} \tag{2-28}$$

其中, 常数c仅依赖于Ω. (2-26)-(2-28)表明

$$\|Au(t)\|_{V'} \leqslant c\|u(t)\|_V, \tag{2-29}$$
$$\|B(u(t))\|_{V'} \leqslant c\|u(t)\|^{1/2}\|u(t)\|_V^{3/2}, \tag{2-30}$$
$$\|N(u(t))\|_{V'} \leqslant c\|u(t)\|_V. \tag{2-31}$$

因此,

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{V'}^2 \mathrm{d}t \leqslant c\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \mathrm{d}t, \tag{2-32}$$
$$\int_0^T \|B(u(t))\|_{V'}^{4/3} \mathrm{d}t \leqslant c\int_0^T \|u(t)\|^{2/3}\|u(t)\|_V^2 \mathrm{d}t$$
$$\leqslant c\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;H)}^{2/3}\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \mathrm{d}t, \tag{2-33}$$
$$\int_0^T \|N(u(t))\|_{V'}^2 \leqslant c\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \mathrm{d}t. \tag{2-34}$$

由(2-33)得(2-24)成立. (2-32)和(2-34)表明Au和$N(u)$均属于$L^2(0,T;V')$. 我们有嵌入$L^2(0,T;V') \hookrightarrow L^{4/3}(0,T;V')$, 因此(2-23)和(2-25)成立. □

下面引进一些函数空间. 记

$$\mathcal{F}_+^{loc} := L^\infty(\mathbb{R}_+;H) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V) \cap \{u(\cdot)|\partial_t u \in L^{4/3}_{loc}(\mathbb{R}_+;V')\}, \tag{2-35}$$
$$\Pi_T\mathcal{F}_+^{loc} := L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap \{u(\cdot)|\partial_t u \in L^{4/3}(0,T;V')\}. \tag{2-36}$$

定义 2.3.4 设$\{u_n(x,t)\}$是$\Pi_T\mathcal{F}_+^{loc}$中一列函数, 如果

$$\begin{cases} u_n(x,t) \rightharpoonup u(x,t) \ \text{在}\ L^\infty(0,T;H)\ \text{中弱}^*\text{收敛}; \\ u_n(x,t) \rightharpoonup u(x,t) \ \text{在}\ L^2(0,T;V)\ \text{中弱收敛}; \\ \partial_t u_n(x,t) \rightharpoonup \partial_t u(x,t) \ \text{在}\ L^{4/3}(0,T;V')\ \text{中弱收敛}, \end{cases} \tag{2-37}$$

则称函数列$\{u_n(x,t)\}$在$\Pi_T\mathcal{F}_+^{loc}$拓扑下收敛于$u(x,t)$. 如果对任意$T>0$, 函数列$\Pi_T\{u_n(x,t)\}$在$\Pi_T\mathcal{F}_+^{loc}$拓扑下收敛于$\Pi_T u(x,t)$, 则称函数列$\{u_n(x,t)\}$在$\mathcal{F}_+^{loc}$拓扑下收敛于$u(x,t)$.

空间$\mathcal{F}_+^{loc}$赋予定义 2.3.4 中的拓扑后记作Θ_+^{loc}. 定义

$$\mathcal{F}_+^b = \{u \in \mathcal{F}_+^{loc} \mid \|u\|_{\mathcal{F}_+^b} < +\infty\}, \tag{2-38}$$

并在其上定义如下范数

$$\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}=\sup_{t\geqslant 0}\left\{\|S(t)u\|_{L^\infty(0,1;H)}+\|S(t)u\|_{L^2(0,1;V)}+\|S(t)\partial_t u\|_{L^{4/3}(0,1;V')}\right\}. \quad (2\text{-}39)$$

不难验证$(\mathcal{F}_+^b,\|\cdot\|_{\mathcal{F}_+^b})$是Banach 空间.

引理 2.3.5 $\mathcal{T}^+\subseteq\mathcal{F}_+^{loc}$.

证明. 对任意$u\in\mathcal{T}^+$, 由引理 2.3.3 知Au, $B(u)$, $N(u)\in L^{4/3}(0,T;V')$, 结合方程(2-15)就有$\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L^{4/3}(0,T;V')$. □

引理 2.3.6 任意$u(s)\in\mathcal{T}^+$, 存在与u无关的常数ρ_1, ρ_2, ρ_0, 使得

$$\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant\rho_1\|u\|^2_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t}+\rho_2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+\rho_0,\ \ \forall t\geqslant 0. \quad (2\text{-}40)$$

证明. 首先有

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}&=\sup_{t\geqslant 0}\{\|S(t)u\|_{L^\infty(0,1;H)}+\|S(t)u\|_{L^2(0,1;V)}+\|S(t)\partial_t u\|_{L^{4/3}(0,1;V')}\}\\&=\sup_{t\geqslant 0}\{\|u(t)\|+(\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s)^{1/2}+(\int_t^{t+1}\|\partial_t u(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s)^{3/4}\}.\end{aligned}$$

由(2-11), $\langle N(u),u\rangle$ 的非负性及能量不等式(2-17), 应用Hölder 不等式, 我们得到

$$-\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2\phi'(s)\mathrm{d}s+\mu_1 c_1\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\|g\|^2_{V'}}{3\mu_1 c_1}\phi(s)\mathrm{d}s \quad (2\text{-}41)$$

对于任意 $\phi(s)\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\phi(s)\geq 0$ 成立. 应用引理 2.2.5 得

$$\|u(t)\|^2\mathrm{e}^{c_1\mu_1 t}-\|u(\tau)\|^2\mathrm{e}^{c_1\mu_1\tau}\leqslant\frac{\|g\|^2_{V'}}{3c_1^2\mu_1^2}(\mathrm{e}^{c_1\mu_1 t}-\mathrm{e}^{c_1\mu_1\tau}),\ \ \forall t,\tau\in\mathbb{R}_+,t\geqslant\tau. \quad (2\text{-}42)$$

因此

$$\|S(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H)}\leqslant c_2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_1,\quad\forall t\in\mathbb{R}_+, \quad (2\text{-}43)$$

其中$c_2=\mathrm{e}^{c_1\mu_1}$, $R_1=\frac{\|g\|_{V'}}{c_1\mu_1}$. 同时, 由于$u\in\mathcal{T}^+$, 对(2-18)两边关于时间变量从$t$到$t+1$积分, 由$\langle N(u),u\rangle$的非负性, Hölder 不等式及Cauchy不等式得

$$\|u(t+1)\|^2+c_1\mu_1\int_t^{t+1}\|u\|_V^2\mathrm{d}s\leqslant\|u(t)\|^2+\frac{\|g\|^2_{V'}}{3c_1\mu_1},\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+. \quad (2\text{-}44)$$

从(2-43)和(2-44得到

$$\begin{aligned}\|S(t)u\|_{L^2(0,1;V)} &= \Big(\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\ &\leqslant \frac{\|u(t)\|}{\sqrt{c_1\mu_1}}+\frac{\|g\|_{V'}}{c_1\mu_1}\\ &\leqslant c_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\end{aligned}\tag{2-45}$$

其中$c_3=\frac{c_2}{\sqrt{c_1\mu_1}}$, $R_2=\frac{R_1}{\sqrt{c_1\mu_1}}+R_1$均与$u$无关. 同时, 由(2-33), (2-43)和(2-45)得

$$\begin{aligned}&\Big(\int_t^{t+1}\|B(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4}\\ &\leqslant c\|u(s)\|_{L^\infty(t,t+1;H)}^{1/2}\|u(s)\|_{L^2(t,t+1;V)}^{3/2}\\ &\leqslant c\big(c_2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_1\big)^{1/2}\big(c_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2\big)^{3/2}\\ &\leqslant c\big(c_4^2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t}+2c_4R_2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2^2\big),\end{aligned}\tag{2-46}$$

其中, $\forall t\geqslant 0$, $c_4=\max\{c_2,c_3\}$与u无关. 类似地, 由(2-31)及(2-45)得

$$\begin{aligned}\Big(\int_t^{t+1}\|N(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} &\leqslant \Big(\int_t^{t+1}\|N(u(s))\|_{V'}^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\leqslant c\Big(\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{V}^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\ &\leqslant c(c_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2),\ \ \forall t\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2-47}$$

注意到A是从V到V'的等距算子, 应用(2-29)和(2-45) 得到

$$\begin{aligned}\Big(\int_t^{t+1}\|Au(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} &\leqslant \Big(\int_t^{t+1}\|Au(s)\|_{V'}^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\leqslant \Big(\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{V}^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\ &\leqslant c_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2,\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}\tag{2-48}$$

结合(2-46)-(2-48)和方程(2-15)得对于任意$t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\Big(\int_t^{t+1}\|\partial_t u(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} &\leqslant 2\mu_1\Big(\int_t^{t+1}\|Au(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4}+\Big(\int_t^{t+1}\|B(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4}\\ &\quad+\Big(\int_t^{t+1}\|N(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4}+\|g\|_{V'}\\ &\leqslant 2\mu_1(c_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2)\\ &\quad+c\big({c_4}^2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t}+2c_4R_2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}\\ &\quad+R_2^2\big)+c(c_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+R_2)+\|g\|_{V'}.\end{aligned}\tag{2-49}$$

由(2-43), (2-45), (2-49)得到(2-40). □

引理 2.3.7　$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{T}^+$中存在有界(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)吸收集$\mathcal{P}\subset\mathcal{T}^+$, 使得对任意有界(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)集$\mathcal{B}\subset\mathcal{T}^+$, 存在时间$t_0=t_0(\mathcal{B})$使得$S(t)(u)\in\mathcal{P}$, $\forall\, u\in\mathcal{B}$, $\forall t\geqslant t_0$.

证明. 记

$$\mathcal{P}=\{u\in\mathcal{T}^+:\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant 3\rho_0\},\tag{2-50}$$

其中ρ_0是(2-40)中的常数. 明显地, $\mathcal{P}$是$\{S(t)\}_{t\geq 0}$在$\mathcal{T}^+$中的有界吸收集. □

引理 2.3.8　轨道空间$\mathcal{T}^+$在Θ_+^{loc}拓扑下是闭集.

证明. 设$\{u_n\}$是$\mathcal{T}^+$中一列(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)有界集, 且存在函数$u^*\in\mathcal{F}_+^{loc}$, 使得

$$u_n\longrightarrow u^*\quad \text{在}\ \Theta_+^{loc}\ \text{拓扑下收敛}.\tag{2-51}$$

下面分两步证明$u^*\in\mathcal{T}^+$.

第一步. 证明对任意$T>0$, $\Pi_T u^*$ 是方程(2-15)在$(0,T)$上的一个弱解. 为此, 我们需要证明$u^*\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V)$, 且$\forall T>0$, $\Pi_T u^*(t)$在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$下满足方程(2-15).

事实上, 由于$\{u_n\}\subset\mathcal{T}^+$且$\{u_n\}$在$\mathcal{F}_+^b$范数下有界, 所以存在某常$c>0$使得

$$\|u_n\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant c,\ \ \forall n\in\mathbb{N}_+.\tag{2-52}$$

应用对角线序列法, 存在$u\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V)$以及$\{u_n\}$的某个子列$\{u_{n_k}\}$使得

$$\Pi_T u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T u\ \ \text{在}\ \ L^\infty(0,T;H)\ \ \text{中弱}^*\text{收敛};\tag{2-53}$$

$$\Pi_T u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T u\ \ \text{在}\ \ L^2(0,T;V)\ \ \text{中弱收敛};\tag{2-54}$$

$$\Pi_T\partial_t u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T\partial_t u\ \ \text{在}\ \ L^{4/3}(0,T;V')\ \ \text{中弱收敛}.\tag{2-55}$$

显然, $\partial_t u\in L^{4/3}_{loc}(\mathbb{R}_+;V')$. 因此在$\Theta_+^{loc}$拓扑下有$u_{n_k}\longrightarrow u$. 由极限的唯一性得

$$u=u^*,\tag{2-56}$$

且由范数的下半连续性有$\|u^*\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant c$. 下面证明$\Pi_T u^*$在分部意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$下满足方程(2-15). 为此, 我们证明下面收敛关系:

$$\Pi_T u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T u^*\ \ \text{在}\ \ L^2(0,T;V)\ \ \text{中弱收敛},\tag{2-57}$$

$$A\Pi_T u_{n_k}\rightharpoonup A\Pi_T u^*\ \ \text{在}\ \ L^2(0,T;V')\ \ \text{中弱收敛},\tag{2-58}$$

$$B(\Pi_T u_{n_k})\rightharpoonup B(\Pi_T u^*)\ \ \text{在}\ \ L^{4/3}(0,T;V')\ \ \text{中弱收敛},\tag{2-59}$$

$$N(\Pi_T u_{n_k})\rightharpoonup N(\Pi_T u^*)\ \ \text{在}\ \ L^2(0,T;V')\ \ \text{中弱收敛}.\tag{2-60}$$

事实上, (2-57)可以直接由(2-54) 得到. 对任意的$\phi \in L^2(0,T;V)\cap \mathcal{C}(0,T;V)$, 由算子$A$ 的定义以及(2-57)我们得到

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \langle A\Pi_T u_{n_k} - A\Pi_T u^*, \phi\rangle \mathrm{d}t = \lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \langle \Pi_T u_{n_k} - \Pi_T u^*, A\phi\rangle \mathrm{d}t = 0. \tag{2-61}$$

同时, 由于$V \hookrightarrow \mathbb{H}_0^1 \hookrightarrow V'$ 是紧嵌入, 由引理 2.2.4 知

$$\Pi_T u_{n_k} \longrightarrow \Pi_T u^* \ \text{在}\ L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)\ \text{中强收敛}. \tag{2-62}$$

应用Hölder不等式和Gagliardo-Nirenberg 不等式以及(2-62), 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \langle B(\Pi_T u_{n_k}) - B(\Pi_T u^*), \phi\rangle \mathrm{d}t \\
&\leqslant \lim_{n_k\to\infty}\int_0^T |-b(\Pi_T(u_{n_k}-u^*),\phi,\Pi_T u_{n_k}) + b(\Pi_T u^*,\phi,\Pi_T(u_{n_k}-u^*)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|^{1/4}\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{\mathbb{H}_0^1}^{3/4}\|\phi\|_{\mathbb{H}_0^1} \\
&\quad\times\|\Pi_T u_{n_k}\|^{1/4}\|\Pi_T u_{n_k}\|_{\mathbb{H}_0^1}^{3/4}\mathrm{d}t + c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|^{1/4} \\
&\quad\times\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{\mathbb{H}_0^1}^{3/4}\|\phi\|_{\mathbb{H}_0^1}\|\Pi_T u^*\|^{1/4}\|\Pi_T u^*\|_{\mathbb{H}_0^1}^{3/4}\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)}(\|\Pi_T u_{n_k}\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)} + \|\Pi_T u^*\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)}) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2-63}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \langle N(\Pi_T u_{n_k}) - N(\Pi_T u^*), \phi\rangle \mathrm{d}t &\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{\mathbb{H}_0^1}\|\phi\|_{\mathbb{H}_0^1}\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)}\|\phi\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2-64}$$

结合(2-55)-(2-60)知

$$\frac{\partial \Pi_T u^*}{\partial t} + 2\mu_1 A\Pi_T u^* + B(\Pi_T u^*) + N(\Pi_T u^*) = g \tag{2-65}$$

在 $L^{4/3}(0,T;V')$ 中成立. 而 $L^{4/3}(0,T)\subset \mathcal{D}'(0,T)$, 故 $\Pi_T u^*$ 在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$ 下满足方程 (2-15).

第二步. 证明$\Pi_T u^*$满足能量不等式(2-17). 由于$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$是紧嵌入, 由引理 2.2.4 得当$n_k \to \infty$时

$$\Pi_T u_{n_k} \longrightarrow \Pi_T u^* \text{ 在 } L^2(0,T;H) \text{ 中强收敛}, \tag{2-66}$$

$$\|\Pi_T u_{n_k}(t)\|^2 \longrightarrow \|\Pi_T u^*(t)\|^2 \text{ 对任意} T > 0 \text{ 成立}. \tag{2-67}$$

现对于任意给定的$\psi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$且$\psi(t) \geqslant 0$, 序列$\{\|\Pi_T u_{n_k}(t)\|^2 \psi'(t)\}$ 属于空间$L^1(0,T)$. (2-52) 表明序列$\{\|\Pi_T u_{n_k}(t)\|^2 \psi'(t)\}$在$(0,T)$上本性有界, 从而存在可积的控制函数. 由勒贝格控制收敛定理和(2-66)得

$$\lim_{n_k \to \infty} \int_0^T \|\Pi_T u_{n_k}(s)\|^2 \psi'(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \|\Pi_T u^*(s)\|^2 \psi'(s)\mathrm{d}s. \tag{2-68}$$

应用(2-51), (2-57) 及范数的下半连续性就有

$$\int_0^T \|\Pi_T u^*(s)\|_V^2 \psi(s)\mathrm{d}s \leqslant \liminf_{n_k \to \infty} \int_0^T \|\Pi_T u_{n_k}(s)\|_V^2 \psi(s)\mathrm{d}s. \tag{2-69}$$

而(2-11)表明$\sqrt{\langle Au, u\rangle}$ 与$\|u\|_V$是等价范数, 故由(2-69)可得

$$\begin{aligned} &2\mu_1 \int_0^T \langle A\Pi_T u^*(s), \Pi_T u^*(s)\rangle \psi(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2\mu_1 \liminf_{n_k \to \infty} \int_0^T \langle A\Pi_T u_{n_k}(s), \Pi_T u_{n_k}(s)\rangle \psi(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2-70}$$

同时, 应用(2-62)及与文献 [36]中相似的方法可以证明

$$\begin{aligned} &\lim_{n_k \to \infty} \int_0^T \langle N(\Pi_T u_{n_k}(s)), \Pi_T u_{n_k}(s)\rangle \psi(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^T \langle N(\Pi_T u^*(s)), \Pi_T u^*(s)\rangle \psi(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2-71}$$

最后, 由(2-66)容易得到

$$\lim_{n_k \to \infty} \int_0^T \langle \Pi_T u_{n_k}(s), g\rangle \psi(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \langle \Pi_T u^*(s), g\rangle \psi(s)\mathrm{d}s. \tag{2-72}$$

注意到$u_{n_k}(t) \in \mathcal{T}^+$, $n_k \in \mathbb{N}$, 因此

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\int_0^T \|\Pi_T u_{n_k}(s)\|^2 \psi'(s)\mathrm{d}s + 2\mu_1 \int_0^T \langle A\Pi_T u_{n_k}(s), \Pi_T u_{n_k}(s)\rangle \psi(s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^T \langle N(\Pi_T u_{n_k}(s)), \Pi_T u_{n_k}(s)\rangle \psi(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^T \langle \Pi_T u_{n_k}(s), g\rangle \psi(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2-73}$$

结合(2-68)-(2-72), 在(2-73)中取极限得

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \|\Pi_T u^*(s)\|^2\psi'(s)\mathrm{d}s + 2\mu_1\int_0^T \langle A\Pi_T u^*(s), \Pi_T u^*(s)\rangle\psi(s)\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^T \langle N(\Pi_T u^*(s)), \Pi_T u^*(s)\rangle\psi(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^T \langle \Pi_T u^*(s), g\rangle\psi(s)\mathrm{d}s. \tag{2-74}$$

综合上面两步的结果得$u^* \in \mathcal{T}^+$. □

2.4 轨道吸引子的存在性

这一节主要证明平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在Θ_+^{loc} 拓扑下在$\mathcal{T}^+$中存在轨道吸引子. 为此, 我们先证明吸收集$\mathcal{P}$ 在Θ_+^{loc} 拓扑下的紧性.

引理 2.4.1 引理 2.3.7 中的吸收集$\mathcal{P}$在Θ_+^{loc}拓扑下是紧集.

证明. 在$\mathcal{P}$中取一(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)有界序列$\{u_n\}$. 由对角线序列法知存在函数$u \in \mathcal{F}_+^{loc}$及$\{u_n\}$的某个子列$\{u_{n_k}\}$, 使得$u_{n_k} \longrightarrow u$在$\Theta_+^{loc}$拓扑下收敛. 由引理 2.3.8 得$u \in \mathcal{T}^+$. 再由范数的下半连续性可得

$$\|u\|_{\mathcal{F}_+^b} \leqslant \varliminf_{n_k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{\mathcal{F}_+^b} \leqslant 3\rho_0, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{2-75}$$

因此 $u \in \mathcal{P}$. □

本文的主要结果如下:

定理 2.4.1 设 $g \in V'$, 则作用在非牛顿流方程组(2-15)-(2-16)的轨道空间$\mathcal{T}^+$上的平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在Θ_+^{loc} 拓扑下存在轨道吸引子$\mathcal{A}^{\mathrm{tr}} \subset \mathcal{P}$, 满足:

(i) (有界性与紧性) $\mathcal{A}^{\mathrm{tr}}$在$\mathcal{F}_+^b$范数下是有界集, 在$\Theta_+^{loc}$拓扑下是紧集;

(ii) (不变性) $S(t)\mathcal{A}^{\mathrm{tr}} = \mathcal{A}^{\mathrm{tr}}, \ \forall t \geqslant 0$;

(iii) (吸引性) 在Θ_+^{loc}拓扑下, $\mathcal{A}^{\mathrm{tr}}$是$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 $\mathcal{T}^+$中的吸引集, 使得对于任意$\mathcal{T}^+$中(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)有界集合$\mathcal{B}$及$\mathcal{A}^{\mathrm{tr}}$的任意邻域$\mathcal{O}(\mathcal{A}^{\mathrm{tr}})$, 存在时间$t^* = t^*(\mathcal{B}, \mathcal{O})$, 使得$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}^{\mathrm{tr}})$, $\forall t \geqslant t^*$.

证明. 应用引理 2.3.2 (ii), 引理 2.3.7 , 引理 2.3.8 , 引理 2.4.1 及文 [31]中定理 4.1 或者文 [11]中定理 XII2.1 就得到结论. □

2.5 小结与说明

本章我们证明了一类自治的不可压非牛顿流方程组在三维有界区域上解的轨道渐近行为. 首先我们构造了方程组(2-1)-(2-4)的轨道空间及作用在其上的平移半群, 然后给出轨道空间的一些相关性质, 应用文 [11]或文 [31]中的方法得到了轨道吸引子的存在性.

这里我们要指出的是, 当$\Omega \subset \mathbb{R}^2$是有界光滑区域时, 用与本章相似的方法可以证明不可压非牛顿流方程组(2-1)-(2-4)轨道吸引子的存在性, 得到与定理 2.4.1 类似的结果, 并可由该结果结合相关函数空间的嵌入推出文 [39]的结果, 类似讨论见 [11].

第三章　非自治的三维不可压非牛顿流方程组的一致轨道吸引子的存在性与正则性

3.1　引言

本章我们研究非自治情形下三维有界区域上带有初值问题的非牛顿流方程组的解的轨道渐近行为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\mu_1 Au+B(u)+N(u)=g(x,t),\ \ t>0, \tag{3-1}$$

$$u|_{t=0}=u_0. \tag{3-2}$$

其中外力项函数$g(x,t)$依赖于时间t. 在§3.2我们引入$g(x,t)$所属的符号空间$\Sigma=\mathcal{H}(g_0)$.

与自治情形时一样, 当参数μ_0, μ_1, ε, α均大于零时, 非自治非牛顿流方程组(3-1)-(3-2) 的解存在但可能不唯一. 为此, 我们用一致轨道吸引子来研究方程组(3-1)-(3-2)的解的渐近行为. 首先, 我们用 [10,11] 中的经典结论得到方程组(3-1)-(3-2)的一致轨道吸引子$\mathcal{A}_\Sigma\subset\mathcal{F}_+^{loc}$的存在性. 同时, 我们证明了方程组(3-1)- (3-2)在空间$\mathcal{M}_+^{loc}$ (比空间$\mathcal{F}_+^{loc}$的正则性高)中也存在一致轨道吸引子(称为一致正则轨道吸引子)$\mathcal{U}_\Sigma$. 然后我们证明了对任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}=\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$成立. 上式意味着方程组(3-1)-(3-2)的解具有渐近光滑效应: 以$u_0\in\mathcal{F}_+^{loc}$为初值的解在半群的作用下, 经过充分长的时间之后进入$\mathcal{M}_+^{loc}$中(比$\mathcal{F}_+^{loc}$具有更高的正则性).

我们想指出的是, 文 [40]证明了方程组(3-1)-(3-2)在二维自治情形下轨道吸引子的正则性, 并且在§2.1中我们提到文 [39]证明了它在二维自治情形下轨道吸引子的存在性. 与文 [39] 和文 [40]不同, 我们在更一般的拓扑空间Θ_+^{loc}和Ξ_+^{loc}(具体定义见§3.4节)中分别讨论一致轨道吸引子与一致正则轨道吸引子的存在性. 拓扑空间Θ_+^{loc}和Ξ_+^{loc} 中的拓扑比文 [39]和文 [40]中的拓扑更强. 事实上, 文 [39]和文 [40]中关于轨道吸引子的存在性与正则性的结论可作为本章在二维自治情形下的推论(具体见§3.5本章小结与说明).

下面引入方程(3-1)的外力项函数$g(x,t)$所在的符号空间Σ. 在本章中, 我们令某固定的外力项$g_0(x,t)=g_0(t)\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$, 记

$$\mathcal{H}(g_0):=\left[\{g_0(t+h)|\ \ h\in\mathbb{R}_+\}\right]_{L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)},$$

$\mathcal{H}(g_0)$称为$g_0(t)$ 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中的壳, 其中 $[\,\cdot\,]_{L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)}$表示在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中取闭包.

定义 3.1.2 设函数$g_0(t)$在空间$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中的壳$\mathcal{H}(g_0)$是紧集, 则称函数$g_0(t)$在空间$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中是平移紧的.

在本章中, 我们假设$g_0(t)$ 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ 中是平移紧的, 取符号空间

$$\Sigma = \mathcal{H}(g_0).$$

我们假设方程(3-1)的外力项函数$g(x,t) \in \Sigma = \mathcal{H}(g_0)$. 定义空间$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$上的平移算子为

$$T(h)\xi(s) := \xi(s+h),\ \ \forall \xi(s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H), \forall\, s,h \in \mathbb{R}_+. \tag{3-3}$$

那么这些算子在$\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$ 上生成一个半群$\{T(h)\}_{h\geqslant 0}$. 类似于 [11, 命题V.3.4], 我们有下面的结论.

引理 3.1.1

(1) $\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$是一个紧的度量空间.

(2) 平移半群$\{T(h)\}_{h\geqslant 0}$在$\mathcal{H}(g_0)$ 上是连续的且有

$$T(h)\mathcal{H}(g_0) \subseteq \mathcal{H}(g_0), \forall\, h \in \mathbb{R}_+. \tag{3-4}$$

而且,

$$\|g(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)} \leqslant \|g_0(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)} < +\infty,\ \ \forall\, g \in \mathcal{H}(g_0). \tag{3-5}$$

3.2 一致轨道吸引子的存在性

在本节中我们构造方程组(3-1)-(3-2)的联合轨道空间及作用其上的平移半群, 之后给出轨道空间的一些相关性质, 最后应用 [10,11]中的经典结论得到一致轨道吸引子的存在性.

下面我们定义(3-1)的弱解:

定义 3.2.1 如果函数$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, 并且$u$ 以及它的导数$\partial_t u$在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$ 下满足方程(3-1), 则称函数u为方程(3-1)在区间$(0,T)$上的一个弱解.

下面结论的证明方法与文 [6]中类似.

引理 3.2.1 对任意的$T>0$, $u_0 \in H$, 如果$g(x,t) \in \mathcal{H}(g_0)$, 初值问题(3-1)-(3-2)至少存在一个区间$[0,T]$ 上的弱解u, 使得u在下面意义下

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^T \|u(s)\|^2\phi'(s)\mathrm{d}s + 2\mu_1\int_0^T \langle Au(s),u(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s \\
&+\int_0^T \langle N(u(s)),u(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^T \langle g(s),u(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{3-6}$$

满足能量不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(u(s),u(s)\big)+2\mu_1\langle Au(s),u(s)\rangle+\langle N(u(s)),u(s)\rangle \\ \leqslant \big(g(s),u(s)\big),\ \ \forall s\in[0,T]. \tag{3-7}$$

其中, $\forall\,\phi(s)\in C_0^\infty([0,T]),\phi(s)\geqslant 0$.

定义 3.2.2　对于任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$, 方程(3-1)的轨道空间$\mathcal{K}_g^+$是由函数$u\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;V)$组成的函数集合, 使得对任意$T>0$, $\Pi_T u$是方程(3-1)在区间$(0,T)$上的一个弱解且在(3-3)意义下满足能量不等式(3-4). 集合$\mathcal{K}_\Sigma^+=\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}=\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}_g^+$称为方程(3-1)的联合轨道空间. $\mathcal{K}_\Sigma^+$ 的所有元素称为方程(3-1)的轨道.

作用在联合轨道空间$\mathcal{K}_\Sigma^+$上的平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$为

$$S(t)u(\cdot)=u(t+\cdot),\ \ u(\cdot)\in\mathcal{K}_g^+,\ \ \forall\,g\in\mathcal{H}(g_0),\forall\,t\geqslant 0. \tag{3-8}$$

对于方程(3-1)的轨道和联合轨道空间, 我们有下面的结论.

引理 3.2.2

(i) 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+H)$中是平移紧的, 那么对任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$, 任意$u_0\in H$, 初值问题(3-1)-(3-2)至少存在一条轨道$u(t)\in\mathcal{K}_g^+$使得$u(0)=u_0$.

(ii) 在$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$的作用下,

$$S(t)\mathcal{K}_g^+\subseteq\mathcal{K}^+_{S(t)g},\ \ \forall\,g\in\mathcal{H}(g_0),\ \ \forall\,t\geqslant 0. \tag{3-9}$$

(iii) 在$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$的作用下, $\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 是正平移不变的, 即

$$S(t)\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}\subseteq\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)},\ \ \forall\,t\geqslant 0. \tag{3-10}$$

证明. 结论(i)可以直接由引理 3.2.1 得到. 下证(ii). 事实上, 如果当外力项为$g(s)$时, $u(s)(s\in[0,T])$是方程(3-1)的一个弱解, 那么对$s\in[0,T-t]$, $T\geqslant t\geqslant 0$, $S(t)u(s)=u(t+s)$是方程(3-1)当外力项为$S(t)g(s)=g(t+s)$时的一个弱解, 结论(ii)证明完毕. 由(ii)得, $S(t)\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}=S(t)\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}_g^+=\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}S(t)\mathcal{K}_g^+\subseteq\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}^+_{S(t)g}\subseteq\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}_g^+=\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$, 从而(iii)得证. □

引理 3.2.3　$\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}\subseteq\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$.

证明. 对任意$u\in\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$, 存在$g\in\mathcal{H}(g_0)$使得$u\in\mathcal{K}_g^+$. 由引理 2.3.3 知对任意的$T>0$, Au, $B(u)$, $N(u)\in L^{4/3}(0,T;V')$. 又$g\in\mathcal{H}(g_0)\subseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)\subseteq L^{4/3}_{loc}(\mathbb{R}_+;V')$, 结合方程(3-1)得$\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L^{4/3}(0,T;V')$, 从而$u\in\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$. □

引理 3.2.4 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中是平移紧的，那么对任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$，任意$u(t) \in \mathcal{K}^+_g$，存在与$u$和$g$无关的正常数 ρ_3，ρ_4和ρ_5，使得对任意$t \in \mathbb{R}_+$有

$$\|S(t)u\|_{\mathcal{F}^b_+} \leqslant \rho_3\|u\|^2_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t} + \rho_4\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + \rho_5. \tag{3-11}$$

证明. 结合(2-11) 和(3-6)，由$\langle N(u), u\rangle$的非负性得，

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2\phi'(s)\mathrm{d}s + 2c_1\mu_1\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2_V\phi(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty}\|g(s)\|\|u(s)\|_V\phi(s)\mathrm{d}s,\ \forall\phi(s) \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}_+),\quad \phi(s) \geqslant 0. \tag{3-12}$$

那么，应用Cauchy不等式及$\|u(s)\| \leqslant \|u(s)\|_V$得

$$-\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2\phi'(s)\mathrm{d}s + c_1\mu_1\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{\|g(s)\|^2}{3\mu_1c_1}\phi(s)\mathrm{d}s. \tag{3-13}$$

对式(3-13) 应用引理 2.2.5 得

$$\|u(t)\|^2e^{c_1\mu_1 t} - \|u(0)\|^2e^{c_1\mu_1\tau} \leqslant \frac{1}{3c_1\mu_1}\int_0^t\|g(s)\|^2e^{c_1\mu_1 s}\mathrm{d}s,\ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3-14}$$

上式表明对任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$和$t \geqslant 0$，有

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \|u(0)\|^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t} + \frac{1}{3c_1\mu_1}\int_0^t\|g(s)\|^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1(t-s)}\mathrm{d}s. \tag{3-15}$$

对任意$t > 0$，记$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}\,|\,0 < t-k+1 \leqslant 1,\ t-k \leqslant 0\}$. 那么对于(3-15) 的第二项，应用(3-5)得

$$\frac{1}{3c_1\mu_1}\int_0^t\|g(s)\|^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1(t-s)}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \frac{1}{3c_1\mu_1}\Big(\int_{t-1}^t\|g(s)\|^2\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-c_1\mu_1}\int_{t-2}^{t-1}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s + \cdots + \mathrm{e}^{-k_0c_1\mu_1}\int_0^{t-k_0+1}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)$$
$$\leqslant \frac{1}{3c_1\mu_1}\big(1 + \mathrm{e}^{-c_1\mu_1} + \cdots + \mathrm{e}^{-k_0c_1\mu_1}\big)\|g_0(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)}$$
$$\leqslant \frac{1}{3c_1\mu_1}\big(1 + \frac{1}{c_1\mu_1}\big)\|g_0(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)},\ \ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall g \in \mathcal{H}(g_0). \tag{3-16}$$

因此，结合(3-15)和(3-16)我们得到

$$\|S(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H)} \leqslant c_4\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-\mu_1c_1t/2} + k_1, \tag{3-17}$$

其中$c_4 := \mathrm{e}^{c_1\mu_1}$, $k_1 := \sqrt{\frac{1}{3c_1\mu_1}\left(1+\frac{1}{c_1\mu_1}\right)}\|g_0(s)\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}$ 均与u 和g 无关. 对于任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$, $u \in \mathcal{K}_g^+$ 满足能量不等式(3-7). 将(3-7)关于s 从t 到$t+1$ 积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|u(t+1)\|^2 - \|u(t)\|^2) + 2\mu_1\int_t^{t+1}\langle Au(s), u(s)\rangle\mathrm{d}s + \int_t^{t+1}\langle N(u(s)), u(s)\rangle\mathrm{d}s\\&\leqslant \int_t^{t+1}(g(s), u(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_t^{t+1}\|g(s)\|\|u(s)\|_V\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3-18}$$

因为$\int_t^{t+1}\langle N(u(s)), u(s)\rangle\mathrm{d}s \geqslant 0$, 应用Cauchy不等式及(2-11)得

$$\|u(t+1)\|^2 + c_1\mu_1\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s \leqslant \|u(t)\|^2 + \int_t^{t+1}\frac{\|g(s)\|^2}{3c_1\mu_1}\mathrm{d}s,\ \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3-19}$$

应用(3-5)和(3-17), 由(3-19)得

$$\begin{aligned}\|S(t)u\|_{L^2(0,1;V)} &= (\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s)^{1/2} \leqslant (\frac{\|u(t)\|^2}{c_1\mu_1} + \int_t^{t+1}\frac{\|g(s)\|^2}{3c_1^2\mu_1^2}\mathrm{d}s)^{1/2}\\&\leqslant \frac{c_4\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_1}{\sqrt{c_1\mu_1}} + \frac{\|g_0(s)\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}}{c_1\mu_1}\\&= c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2, \forall t \in \mathbb{R}_+,\end{aligned} \tag{3-20}$$

其中,

$$c_5 := \frac{c_4}{\sqrt{c_1\mu_1}},\ \ k_2 := \frac{k_1}{\sqrt{c_1\mu_1}} + \frac{\|g_0(s)\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}}{c_1\mu_1} \tag{3-21}$$

均与u和g无关. 由(2-32)和(3-20)得

$$\begin{aligned}\|S(t)Au\|_{L^{4/3}(0,1;V')} &= (\int_t^{t+1}\|Au(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s)^{3/4} \leqslant (\int_t^{t+1}\|Au(s)\|_{V'}^2\mathrm{d}s)^{1/2}\\&\leqslant c(\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s)^{1/2}\\&\leqslant c\big(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2\big),\ \ \forall t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned} \tag{3-22}$$

类似地, 由(2-33),(3-17)和(3-20)得

$$
\begin{aligned}
&\|S(t)B(u)\|_{L^{4/3}(0,1;V')} = \Big(\int_t^{t+1} \|B(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} \\
&\leqslant c\|u(s)\|_{L^\infty(t,t+1;H)}^{1/2}\|u(s)\|_{L^2(t,t+1;V)}^{3/2} \\
&\leqslant c\big(c_6\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_3\big)^{1/2}\big(c_6\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_3\big)^{3/2} \\
&= c\big(c_6\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_3\big)^{2} \\
&= c\big(c_6^2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t}+2c_6k_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_3^2\big),
\end{aligned}
\tag{3-23}
$$

其中$c_6:=\max\{c_4,c_5\}$, $k_3:=\max\{k_1,k_2\}$均与u和g无关. 类似地, 由(2-34)得

$$
\begin{aligned}
\|S(t)N(u)\|_{L^{4/3}(0,1;V')} &= \Big(\int_t^{t+1} \|N(u(s))\|_{V^*}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} \leqslant \Big(\int_t^{t+1} \|N(u(s))\|_{V^*}^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2} \\
&\leqslant c\Big(\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{V}^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2} \\
&\leqslant c(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}e^{-\mu_1 c_1 t/2}+k_2),\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

由$g\in\mathcal{H}(g_0)\subseteq L_b^2(\mathbb{R}_+;H)\hookrightarrow L_b^2(\mathbb{R}_+;V')\hookrightarrow L_b^{4/3}(\mathbb{R}_+;V')$, 结合(3-1), (3-22)-(3-24)得

$$
\begin{aligned}
&\|S(t)\partial_t u\|_{L^{4/3}(0,1;V')} = \Big(\int_t^{t+1} \|\partial_t u(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} \\
&\leqslant 2\mu_1\Big(\int_t^{t+1} \|Au(s)\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4}+\Big(\int_t^{t+1} \|B(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} \\
&\quad+\Big(\int_t^{t+1} \|N(u(s))\|_{V'}^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4}+\Big(\int_t^{t+1} \|g(s)\|^{4/3}\mathrm{d}s\Big)^{3/4} \\
&\leqslant 2\mu_1 c\big(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_2\big) \\
&\quad+c\big(c_6^2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t}+2c_6k_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_3^2\big) \\
&\quad+c(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-\mu_1 c_1 t/2}+k_2)+\Big(\int_t^{t+1} \|g(s)\|^{2}\mathrm{d}s\Big)^{1/2} \\
&\leqslant 2c\mu_1\big(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_2\big) \\
&\quad+c\big(c_6^2\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}^2\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t}+2c_6k_3\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_3^2\big) \\
&\quad+c(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;H)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}+k_2)+\|g_0(s)\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}.
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

由(3-17), (3-20)和(3-25)就得到(3-11). □

在引理 3.2.4 的基础上, 我们构造平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$中的一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界吸收集.

引理 3.2.5　设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+H)$中是平移紧的, 则$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$中存在一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界(在$\mathcal{F}^b_+$范数下)吸收集$\Lambda$, 使得对$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$中的任意有界(在$\mathcal{F}^b_+$范数下)集合$\mathcal{B}$, 存在时间$t_0=t_0(\mathcal{B})$ 使得$S(t)u\in\Lambda$, $\forall\, u\in\mathcal{B}$, $\forall\, t\geqslant t_0$, $\forall\, g\in\mathcal{H}(g_0)$.

证明. 记

$$\Lambda:=\{u\in\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}\ \big|\ \|u\|_{\mathcal{F}^b_+}\leqslant 3\rho_5\},$$

其中ρ_5是(3-11)中的常数. 显然, Λ是$\{S(t)\}_{t\geq 0}$在联合轨道空间$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$中的一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界吸收集.

下面我们研究联合轨道空间$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 在拓扑空间Θ^{loc}_+中的封闭性, 这对我们证明一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界吸收集Λ在拓扑空间Θ^{loc}_+ 中的紧性起重要作用.

引理 3.2.6　联合轨道空间$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$在$\Theta^{loc}_+$ 拓扑下是闭集.

证　设$\{u_m\}$是$\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 中一列(在$\mathcal{F}^b_+$ 范数下)有界集, 且存在函数$u^*\in\mathcal{F}^{loc}_+$, 使得

$$u_m\longrightarrow u^*\quad \text{在}\ \Theta^{loc}_+\ \text{拓扑下收敛}. \tag{3-26}$$

下面我们分两步证明$u^*\in\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$.

第一步. 证明对任意$T>0$, $\Pi_T u^*$ 是方程(3-1)在$(0,T)$ 上的一个弱解. 为此, 我们需要证明$u^*\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}_+;V)$, 且$\forall T>0$, $\Pi_T u^*$ 在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$ 下满足方程(3-1). 事实上, $\{u_m\}\subset\mathcal{K}^{+}_{\mathcal{H}(g_0)}$, 因此存在$\{g_m\}\subset\mathcal{H}(g_0)$使得$\{u_m\}\subset\mathcal{K}^{+}_{g_m}$, 且有

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}+2\mu_1 Au_m+B(u_m)+N(u_m)=g_m(x,t),\ \ m=1,2,3,\cdots. \tag{3-27}$$

g_0 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+H)$ 中是平移紧的, 因此存在$g\in\mathcal{H}(g_0)$ 使得当$m\to\infty$ 时

$$g_m\longrightarrow g\ \text{在}\ \mathcal{H}(g_0)\ \text{中强收敛}. \tag{3-28}$$

用与引理 2.3.8 的相同的证明方法, 我们得到存在$\{u_m\}$的某个子列$\{u_{m'}\}$使得当$m'\to\infty$ 时,

$$\Pi_T\partial_t u_{m'}\rightharpoonup\Pi_T\partial_t u\ \text{在}\ L^{4/3}(0,T;V')\ \text{中弱收敛}. \tag{3-29}$$

$$\Pi_T u_{m'}\rightharpoonup\Pi_T u^*\ \text{在}\ L^2(0,T;V)\ \text{中弱收敛}, \tag{3-30}$$

$$A\Pi_T u_{m'}\rightharpoonup A\Pi_T u^*\ \text{在}\ L^2(0,T;V')\ \text{中弱收敛}, \tag{3-31}$$

$$B(\Pi_T u_{m'})\rightharpoonup B(\Pi_T u^*)\ \text{在}\ L^{4/3}(0,T;V')\ \text{中弱收敛}, \tag{3-32}$$

$$N(\Pi_T u_{m'})\rightharpoonup N(\Pi_T u^*)\ \text{在}\ L^2(0,T;V').\ \text{中弱收敛}, \tag{3-33}$$

应用(3-28)-(3-33), 在(3-27)中取极限得

$$\frac{\partial \Pi_T u^*}{\partial t} + 2\mu_1 A\Pi_T u^* + B(\Pi_T u^*) + N(\Pi_T u^*) = g \tag{3-34}$$

在$L^{4/3}(0,T;V')$ 中成立. 而$L^{4/3}(0,T) \subset \mathcal{D}'(0,T)$, 故$\Pi_T u^*$在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;V')$下满足方程(3-1).

第二步. 证明$\Pi_T u^*$满足能量不等式(3-6). 应用引理 2.3.8 的证明方法, 我们得到当$m' \to \infty$

$$\Pi_T u_{m'} \longrightarrow \Pi_T u^* \quad 在 \quad L^2(0,T;H) \ 中强收敛, \tag{3-35}$$

而且, 对于任意给定的$\psi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(0,T)$, $\psi(t) \geqslant 0$, 我们有

$$\lim_{m'\to\infty} \int_0^T \|\Pi_T u_{m'}(s)\|^2 \phi'(s) \mathrm{d}s = \int_0^T \|\Pi_T u^*(s)\|^2 \phi'(s) \mathrm{d}s. \tag{3-36}$$

$$\begin{aligned} &2\mu_1 \int_0^T \langle A\Pi_T u^*(s), \Pi_T u^*(s)\rangle \phi(s) \mathrm{d}s \\ &\leqslant 2\mu_1 \liminf_{m'\to\infty} \int_0^T \langle A\Pi_T u_{m'}(s), \Pi_T u_{m'}(s)\rangle \phi(s) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3-37}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{m'\to\infty} \int_0^T \langle N(\Pi_T u_{m'}(s)), \Pi_T u_{m'}(s)\rangle \phi(s) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^T \langle N(\Pi_T u^*(s)), \Pi_T u^*(s)\rangle \phi(s) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3-38}$$

对于外力项$g_{m'}(s)$, 我们有

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T (g_{m'}(s), \Pi_T u_{m'}(s)) \phi(s) \mathrm{d}s - \int_0^T (g(s), \Pi_T u^*(s)) \phi(s) \mathrm{d}s \Big| \\ &\leqslant \Big| \int_0^T (g_{m'}(s), \Pi_T u_{m'}(s) - \Pi_T u^*(s)) \phi(s) \mathrm{d}s \Big| + \Big| \int_0^T (g_{m'}(s) - g(s), \Pi_T u^*(s)) \phi(s) \mathrm{d}s \Big| \\ &\leqslant I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{3-39}$$

其中

$$I_1 := c\Big(\int_0^T \|\Pi_T u_{m'}(s) - \Pi_T u^*(s)\|^2 \mathrm{d}s \Big)^{1/2} \Big(\int_0^T \|g_{m'}(s)\|^2 \mathrm{d}s \Big)^{1/2},$$

$$I_2 := \Big| \int_0^T (g_{m'}(s) - g(s), \Pi_T u^*(s)) \phi(s) \mathrm{d}s \Big|.$$

由(3-5) 我们得到$\{g_{m'}(s)\}\subset\{g_m(s)\}$在$L^2(0,T;H)$中有界. 应用(3-35) 得当$m'\to\infty$时,

$$I_1\longrightarrow 0. \tag{3-40}$$

由(3-28)得当$m'\to\infty$时,

$$I_2\longrightarrow 0. \tag{3-41}$$

由(3-39)-(3-41)得

$$\lim_{m'\to\infty}\int_0^T(g_{m'}(s),\Pi_T u_{m'}(s))\phi(s)\mathrm{d}s=\int_0^T(g(s),\Pi_T u^*(s))\phi(s)\mathrm{d}s. \tag{3-42}$$

$u_{m'}(t)\in\mathcal{K}^+_{g_{m'}}$, 故$\Pi_T u_{m'}(t)$ 满足不等式(3-6), 即

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_0^T\|\Pi_T u_{m'}(s)\|^2\phi'(s)\mathrm{d}s+2\mu_1\int_0^T\langle A\Pi_T u_{m'}(s),\Pi_T u_{m'}(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\\&+\int_0^T\langle N(\Pi_T u_{m'}(s)),\Pi_T u_{m'}(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^T(g_{m'}(s),\Pi_T u_{m'}(s))\phi(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3-43}$$

应用(3-36)-(3-38) 及(3-42), 在(3-43)中取极限得

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_0^T\|\Pi_T u^*(s)\|^2\phi'(s)\mathrm{d}s+2\mu_1\int_0^T\langle A\Pi_T u^*(s),\Pi_T u^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\\&+\int_0^T\langle N(\Pi_T u^*(s)),\Pi_T u^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^T(g(s),\Pi_T u^*(s))\phi(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3-44}$$

综合两部证明的结果, 我们得到$u^*\in\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$. □

引理 3.2.7　引理 3.2.5 中的一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界轨道吸收集Λ 在Θ_+^{loc}拓扑下是紧集.

证明. 在Λ中取一(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)有界序列$\{u_m\}$. 由对角线序列法知存在函数$u\in\mathcal{F}_+^{loc}$ 及$\{u_m\}$ 的某个子列$\{u_{m'}\}$, 使得$u_{m'}\longrightarrow u$ 在Θ_+^{loc} 拓扑下收敛. 由引理 3.2.6 得$u\in\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$. 再由范数的下半连续性可得

$$\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant\lim_{m'\to\infty}\|u_{m'}\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant 3\rho_5,\ \ \forall t\geqslant 0. \tag{3-45}$$

因此$u\in\Lambda$. □

本节的主要结果如下:

定理 3.2.1 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ 中是平移紧的, 任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$. (3-8)定义的平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在Θ^{loc}_+拓扑下存在一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)轨道吸引子$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}\subset\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}\cap\Lambda$, 满足:

(i) (有界性与紧性) $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 在$\mathcal{F}^b_+$范数下是有界集, 在Θ^{loc}_+ 拓扑下是紧集;

(ii) (不变性) $S(t)\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}=\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$, $\forall t\geqslant 0$;

(iii) (一致吸引性) 在Θ^{loc}_+拓扑下, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$是$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$中的一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)吸引集, 使得对于任意$\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$中有界(在$\mathcal{F}^b_+$范数下)集$\mathcal{B}$及$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$的任意邻域$\mathcal{O}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)})$, 存在时间$t^*=t^*(\mathcal{B},\mathcal{O}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}))$, 使得$S(t)\mathcal{B}\subset\mathcal{O}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)})$, $\forall t\geqslant t^*$.

证明. 应用 [11, 定理XIV.3.1], 引理 3.1.1, 引理 3.2.2(ii), 引理 3.2.5, 引理 3.2.6, 引理 3.2.7, 就得到结论. □

3.3 一致正则轨道吸引子的存在性

在这部分, 我们证明一致正则轨道吸引子的存在性. 首先定义方程(3-1)的正则弱解.

定义 3.3.1 任意$T>0$, 如果函数$u\in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))$, 并且$u$ 以及它的导数$\partial_t u$ 在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;H)$ 下满足方程(3-1), 则称函数u为方程(3-1)在区间$(0,T)$上的一个正则弱解.

下面结论的证明方法与文 [6]中类似.

引理 3.3.1 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中是平移紧的. 对任意的$T>0$, $u_0\in V$ 及任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$, 初值问题(3-1)-(3-2)至少存在一个区间$[0,T]$ 上的正则弱解u, 使得u在下面意义下

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^T(u(s),Au(s))\phi'(s)\mathrm{d}s+2\mu_1\int_0^T\|Au(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s+\int_0^T\langle B(u(s)),Au(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\\
&+\int_0^T\langle N(u(s)),Au(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^T(g(s),Au(s))\phi(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{3-46}
$$

满足能量不等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(u(s),Au(s))+2\mu_1\|Au(s)\|^2+\langle B(u(s)),Au(s)\rangle\\
&+\langle N(u(s)),Au(s)\rangle\leqslant(g(s),Au(s)),\ \ \forall s\in[0,T],
\end{aligned}
\tag{3-47}
$$

其中$\forall\phi(s)\in\mathcal{C}^\infty_0([0,T])$, $\phi(s)\geqslant 0$.

在定义 3.3.1 及引理 3.3.1 的基础上, 我们定义方程(3-1)的联合正则轨道空间.

定义 3.3.2 对于任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$, 方程(3-1)的正则轨道空间$\mathcal{J}_g^+$由函数$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;V) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;D(A))$ 组成, 使得对任意$T > 0$, $\Pi_T u$ 是方程(3-1)在区间$(0,T)$上的一个正则弱解且在(3-46)意义下满足能量不等式(3-47). 集合$\mathcal{J}_\Sigma^+ = \mathcal{J}_{\mathcal{H}(g_0)}^+ = \bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)} \mathcal{J}_g^+$ 称为方程(3-1)的联合正则轨道空间. $\mathcal{J}_\Sigma^+$ 的所有元素称为方程(3-1)的正则轨道.

我们同样引入作用在联合正则轨道空间$\mathcal{J}_\Sigma^+$ 上的平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$:

$$S(t)u(\cdot) = u(t+\cdot), \;\; u(\cdot) \in \mathcal{J}_g^+, \;\; \forall g \in \mathcal{H}(g_0), \forall t \geqslant 0. \tag{3-48}$$

引理 3.3.2 设g_0 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+H)$ 中是平移紧的, 则

(i) 任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$, 任意$u_0 \in V$, 初值问题(3-1)-(3-2)至少存在一条正则轨道$u(t) \in \mathcal{J}_g^+$ 使得$u(0) = u_0$.

(ii) 任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$, 在$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的作用下,

$$S(t)\mathcal{J}_g^+ \subseteq \mathcal{J}_{S(t)g}^+, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3-49}$$

(iii) 在$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的作用下, $\mathcal{J}_{\mathcal{H}(g_0)}^+$ 是正平移不变的, 即

$$S(t)\mathcal{J}_{\mathcal{H}(g_0)}^+ \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{H}(g_0)}^+, \;\; \forall t \geqslant 0. \tag{3-50}$$

证明. 结论(i)可以直接由引理 3.3.1 得到. (ii)和(iii)中结论的证明分别与引理 3.2.2 中(ii)和(iii)的证明相似, 这里就不再做详细证明. □

为了引入与一致正则轨道空间$\mathcal{J}_\Sigma^+$相应的拓扑空间, 我们先证明下面的结论.

引理 3.3.3 设$u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$, 则$Au$, $B(u)$, $N(u)$ 均属于$L^2(0,T;H)$.

证明. $u \in L^2(0,T;D(A))$, 显然$Au \in L^2(0,T;H)$. 对任意$\phi \in H$, 应用Hölder不等式及Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$\begin{aligned} |\langle B(u),\phi\rangle| &\leqslant \|u\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|\phi\| \\ &\leqslant c\|u\|^{5/8}\|\Delta u\|^{3/8}\|u\|^{1/8}\|\Delta u\|^{7/8}\|\phi\| \\ &\leqslant c\|u\|_V^2\|\phi\|. \end{aligned} \tag{3-51}$$

所以由(3-51)得,

$$\|B(u)\| \leqslant c\|u\|_V^2. \tag{3-52}$$

从而,

$$\int_0^T \|B(u)\|^2 \mathrm{d}t \leqslant c \int_0^T \|u\|_V^4 \mathrm{d}t < +\infty,$$

这表明$B(u) \in L^2(0,T;H)$. 与 [38, (3-11)]的推导类似, 我们可以得到

$$\begin{aligned} |\langle N(u), \phi\rangle| &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\mu(u) e_{ij}(u) e_{ij}(\phi)| \mathrm{d}x \\ &\leqslant c(\|\nabla u\| + \|\Delta u\|)\|\phi\| \leqslant c\|u\|_V \|\phi\|. \end{aligned} \tag{3-53}$$

由(3-53)得,

$$\|N(u)\| \leqslant c\|u\|_V. \tag{3-54}$$

从而,

$$\int_0^T \|N(u)\|^2 \mathrm{d}t \leqslant c \int_0^T \|u\|_V^2 \mathrm{d}t < +\infty.$$

因此$N(u) \in L^2(0,T;H)$. □

引入相应的拓扑空间及巴拿赫空间, 记

$$\mathcal{M}_+^{loc} := L^\infty(\mathbb{R}_+;V) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;D(A)) \cap \{u(\cdot)|\partial_t u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)\}, \tag{3-55}$$

$$\Pi_T \mathcal{M}_+^{loc} := L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap \big\{u(\cdot)\big|\partial_t u \in L^2(0,T;H)\big\}. \tag{3-56}$$

定义 3.3.3 设$\{u_n\}$ 是$\Pi_T \mathcal{M}_+^{loc}$ 中一列函数, $u \in \Pi_T \mathcal{M}_+^{loc}$, 如果

$$\begin{cases} u_n(x,t) \rightharpoonup u(x,t) \ \text{在} \ L^\infty(0,T;V) \ \text{中弱}^*\text{收敛}; \\ u_n(x,t) \rightharpoonup u(x,t) \ \text{在} \ L^2(0,T;D(A)) \ \text{中弱收敛}; \\ \partial_t u_n(x,t) \rightharpoonup \partial_t u(x,t) \ \text{在} \ L^2(0,T;H) \ \text{中弱收敛}, \end{cases} \tag{3-57}$$

则称函数列$\{u_n\}$在$\Pi_T \mathcal{M}_+^{loc}$拓扑下收敛于$u$. 若$\forall T > 0$, 函数列$\{\Pi_T u_n\}$在$\Pi_T \mathcal{M}_+^{loc}$拓扑下收敛于$\Pi_T u$, 则称函数列$\{u_n\}$在$\mathcal{M}_+^{loc}$拓扑下收敛于$u$.

空间$\mathcal{M}_+^{loc}$赋予定义 3.3.3 中的拓扑后记作Ξ_+^{loc}. 定义

$$\mathcal{M}_+^b = \{u \in \mathcal{M}_+^{loc} \mid \|u\|_{\mathcal{M}_+^b} < +\infty\}, \tag{3-58}$$

并在其上定义如下范数

$$\|u\|_{\mathcal{M}_+^b} = \sup_{t \geqslant 0} \big\{\|S(t)u\|_{L^\infty(0,1;V)} + \|S(t)u\|_{L^2(0,1;D(A))} + \|S(t)\partial_t u\|_{L^2(0,1;H)}\big\}. \tag{3-59}$$

不难验证$(\mathcal{M}_+^b, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_+^b})$ 是Banach 空间.

引理 3.3.4 $\mathcal{J}_{\mathcal{H}(g_0)}^+ \subseteq \mathcal{M}_+^{loc}$.

证明. 对任意$u\in\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$, 存在$g\in\mathcal{H}(g_0)$使得$u\in\mathcal{J}^+_g$. 因此任意$T>0$, $u\in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))$. 由引理 3.3.3 知$Au$, $B(u)$, $N(u)$均属于$L^2(0,T;H)$. 又$g\in\mathcal{H}(g_0)\subseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$, 结合方程(3-1)得$\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T;H)$. 从而, $u\in\mathcal{M}^{loc}_+$. □

下面关于正则轨道的估计对我们证明平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 中存在一致正则吸收集起重要作用.

引理 3.3.5　设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中是平移紧的, 则对任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$, 任意$u(s)\in\mathcal{J}^+_g$有,

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{M}^b_+}&=\|S(t)u\|_{L^\infty(0,1;V)}+\|S(t)u\|_{L^2(0,1;D(A))}+\|S(t)\partial_t u\|_{L^2(0,1;H)}\\&=\sup_{s\geqslant 0}\|u(t+s)\|_V+\Big(\int_0^1\|Au(t+s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}+\Big(\int_0^1\|\partial_t u(t+s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\&=\sup_{s\geqslant t}\|u(s)\|_V+\Big(\int_t^{t+1}\|Au(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}+\Big(\int_t^{t+1}\|\partial_t u(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\&\leqslant\mathcal{N}(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2})+\big(1+\frac{1}{\mu_1}\big)\|g_0(s)\|_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)},\quad\forall t\geqslant 1,\end{aligned}\tag{3-60}$$

其中$\mathcal{N}(\cdot)$ 是$\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}$ 的连续单调函数.

证明. 对任意的$g\in\mathcal{H}(g_0)$, 任意$u\in\mathcal{J}^+_g\subset\mathcal{J}^+_{H(g_0)}$, 由引理 3.3.4 得$u_t\in L^2(0,T;H)$. 用$u_t$ 与方程(3-1)作对偶积得

$$\|u_t\|^2+2\mu_1\langle Au(t),u_t\rangle+\langle B(u(t)),u_t\rangle+\langle N(u(t)),u_t\rangle=(g(t),u_t).\tag{3-61}$$

取

$$\Gamma(|e(u)|):=\int_0^{|e(u)|^2}\mu_0(\varepsilon+s)^{-\alpha/2}\mathrm{d}s,\tag{3-62}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,j=1}^3\mu(u)e_{ij}(u)e_{ij}(u_t).\tag{3-63}$$

因此, 我们得到

$$\langle N(u(t)),u_t\rangle=\sum_{i,j=1}^3\int_\Omega\mu(u)e_{ij}(u)e_{ij}(u_t)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_\Omega\Gamma(|e(u)|)\mathrm{d}x\Big).\tag{3-64}$$

将(3-64)代入(3-61)得

$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mu_1\langle Au(t),u(t)\rangle+\int_\Omega\Gamma(|e(u)|)\mathrm{d}x\Big)\\&=-\langle B(u(t)),u_t\rangle+(g(t),u_t)\\&\leqslant\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\Big|u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|\mathrm{d}x+\|g(t)\|^2+\frac{1}{4}\|u_t\|^2\\&\leqslant\|u\|_{\mathbb{L}^4}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^4}\|u_t\|+\|g(t)\|^2+\frac{1}{4}\|u_t\|^2.\end{aligned}\tag{3-65}$$

应用Gagliardo-Nirenberg 不等式及Cauchy不等式得

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbb{L}^4}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^4}\|u_t\|&\leqslant c\|u\|^{5/8}\|\Delta u\|^{3/8}\|u\|^{1/8}\|\Delta u\|^{7/8}\|u_t\|\\&\leqslant c\|u\|_V^2\|u_t\|\leqslant c\|u\|_V^4+\frac{1}{4}\|u_t\|^2.\end{aligned}\tag{3-66}$$

考虑(2-11)及(3-65)-(3-66)得

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\gamma(t)f(t)+h(t),\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+,\tag{3-67}$$

其中

$$\begin{aligned}&f(t):=\mu_1\langle Au(t),u(t)\rangle+\int_\Omega\Gamma(|e(u)|)\mathrm{d}x,\\&\gamma(t):=\frac{c}{\mu_1c_1}\|u\|_V^2,\quad h(t):=\|g(t)\|^2.\end{aligned}$$

由(3-5)可直接得到

$$\int_t^{t+1}h(s)\mathrm{d}s=\int_t^{t+1}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\|g_0(s)\|^2_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)},\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+.\tag{3-68}$$

应用(3-20)得

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\gamma(s)\mathrm{d}s&=\frac{c}{c_1\mu_1}\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{c}{c_1\mu_1}(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1t/2}+k_2),\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}\tag{3-69}$$

结合(2-11), 应用(3-20)得

$$\begin{aligned}\mu_1\int_t^{t+1}\langle Au(s),u(s)\rangle\mathrm{d}s&\leqslant\mu_1\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\mu_1(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1t/2}+k_2),\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}\tag{3-70}$$

我们注意到, 对任意$s \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $0 < (\varepsilon + s)^{-\alpha/2} \leqslant \varepsilon^{-\alpha/2}$ 成立. 因此

$$\Gamma(|e(u)|) = \int_0^{|e(u)|^2} \mu_0(\varepsilon + s)^{-\alpha/2}\mathrm{d}s \leqslant \mu_0\varepsilon^{-\alpha/2}|e(u)|^2.$$

应用不等式$\int_\Omega |e(u)|^2\mathrm{d}x \leqslant 9\|u\|_V^2$(易证)我们推导出

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\int_\Omega \Gamma(|e(u)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}s &\leqslant \mu_0\varepsilon^{-\alpha/2}\int_t^{t+1}\int_\Omega |e(u)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\leqslant 9\mu_0\varepsilon^{-\alpha/2}\int_t^{t+1}\|u(s)\|_V^2\mathrm{d}s \\ &\leqslant 9\mu_0\varepsilon^{-\alpha/2}(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-\mu_1 c_1 t/2} + k_2),\ \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3\text{-}71)\end{aligned}$$

从(3-70)及(3-71)我们得到

$$\int_t^{t+1} f(s)\mathrm{d}s \leqslant c(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2),\ \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3\text{-}72)$$

设$\tau \in [t, t+1]$. 把(3-67)中的时间变量换成τ, 然后在此不等式两边同时乘以$\exp\Big(-\int_t^\tau \gamma(s)\mathrm{d}s\Big)$得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(f(\tau)\exp\Big(-\int_t^\tau \gamma(s)\mathrm{d}s\Big)\Big) \leqslant h(\tau)\exp\Big(-\int_t^\tau \gamma(s)\mathrm{d}s\Big) \leqslant h(\tau). \quad (3\text{-}73)$$

将(3-73)在区间$[\xi, t+1]$$(t \leqslant \xi \leqslant \tau \leqslant t+1)$ 上关于变量τ 积分得

$$f(t+1)\exp\Big(-\int_t^{t+1}\gamma(s)\mathrm{d}s\Big) \leqslant f(\xi)\exp\Big(-\int_t^{\xi}\gamma(s)\mathrm{d}s\Big) + \int_t^{t+1} h(s)\mathrm{d}s. \quad (3\text{-}74)$$

从而, 对任意$t \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in [t, t+1]$,

$$\begin{aligned}f(t+1) &\leqslant \Big(f(\xi) + \int_t^{t+1} h(s)\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(\int_t^{t+1}\gamma(s)\mathrm{d}s\Big) \\ &\leqslant \big(f(\xi) + \|g_0(s)\|^2_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}\big) \\ &\quad \times \exp\Big\{\frac{c}{c_1\mu_1}(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-\mu_1 c_1 t/2} + k_2)\Big\}. \quad (3\text{-}75)\end{aligned}$$

成立. 现在我们把(3-75)关于变量ξ 从t 到$t+1$ 积分得

$$
\begin{aligned}
f(t+1) &\leqslant \Big(\int_t^{t+1} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \|g_0(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+)} \Big) \exp\Big\{ \frac{c}{c_1\mu_1}(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2) \Big\} \\
&\leqslant \Big\{ c(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2) + \|g_0(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)} \Big\} \\
&\quad \times \exp\Big\{ \frac{c}{c_1\mu_1}(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2) \Big\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \qquad (3\text{-}76)
\end{aligned}
$$

由(2-11)及(3-76)得

$$
\begin{aligned}
\|u(t+1)\|^2_V &\leqslant \frac{1}{c_1}\langle Au(t+1), u(t+1)\rangle \leqslant \frac{1}{c_1\mu_1} f(t+1) \\
&\leqslant \mathcal{N}_1(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}), \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad (3\text{-}77)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}) := \frac{1}{c_1\mu_1} &\Big\{ c(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2) \\
&+ \|g_0(s)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)} \Big\} \\
&\times \exp\Big\{ \frac{c}{c_1\mu_1}(c_5\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2} + k_2) \Big\}.
\end{aligned}
$$

因此由(3-77)推导出

$$
\|S(t)u\|_{L^\infty(0,1;V)} \leqslant \mathcal{N}_1^{1/2}(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1 t/2}), \quad \forall t \geqslant 1. \qquad (3\text{-}78)
$$

由(3-47)得

$$
\begin{aligned}
&(u_t, Au(t)) + 2\mu_1\|Au(t)\|^2 + \langle B(u(t)), Au(t)\rangle + \langle N(u(t)), Au(t)\rangle \\
&\leqslant (g(t), Au(t)). \qquad (3\text{-}79)
\end{aligned}
$$

对于(3-79) 中的每一项, 我们有

$$
(u_t, Au(t)) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t), Au(t)), \qquad (3\text{-}80)
$$

$$
\langle B(u(t)), Au(t)\rangle = (B(u(t)), Au(t)) \leqslant \frac{\mu_1}{2}\|Au(t)\|^2 + \frac{1}{2\mu_1}\|B(u(t))\|^2, \qquad (3\text{-}81)
$$

$$
\langle N(u(t)), Au(t)\rangle = (N(u(t)), Au(t)) \leqslant \frac{\mu_1}{2}\|Au(t)\|^2 + \frac{1}{2\mu_1}\|N(u(t))\|^2, \qquad (3\text{-}82)
$$

$$
(g(t), Au(t)) \leqslant \frac{\mu_1}{2}\|Au(t)\|^2 + \frac{1}{2\mu_1}\|g(t)\|^2. \qquad (3\text{-}83)
$$

由(3-79)-(3-80)我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(u(t), Au(t)\big) + 4\mu_1\|Au(t)\|^2 \\
&\leqslant 2\big(|(g(t), Au(t))| + |(B(u(t)), Au(t))| + |(N(u(t)), Au(t))|\big). \qquad (3\text{-}84)
\end{aligned}
$$

考虑(3-81)-(3-84), 我们就得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),Au(t))+\mu_1\|Au(t)\|^2\\ \leqslant\ &\frac{1}{\mu_1}\left(\|B(u(t))\|^2+\|N(u(t))\|^2+\|g(t)\|^2\right).\end{aligned} \tag{3-85}$$

用s替换(3-85)中的时间变量t, 然后关于s 从t 到$t+1$ 积分得

$$\begin{aligned}&\big(u(t+1),Au(t+1)\big)+\mu_1\int_t^{t+1}\|Au(s)\|^2\mathrm{d}s\\ \leqslant\ &\frac{1}{\mu_1}\int_t^{t+1}\|B(u(s))\|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\mu_1}\int_t^{t+1}\|N(u(s))\|^2\mathrm{d}s\\ &+\frac{1}{\mu_1}\int_t^{t+1}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s+(u(t),Au(t)).\end{aligned} \tag{3-86}$$

由(3-52), (3-54), 应用(3-78)得

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\|B(u(s))\|^2\mathrm{d}s&\leqslant c\|u\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}_+;V)}\\ &\leqslant c\mathcal{N}_1^2(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1t/2}),\quad\forall t\in\mathbb{R}_+,\end{aligned} \tag{3-87}$$

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\|N(u(s))\|^2\mathrm{d}s&\leqslant c\|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+;V)}\\ &\leqslant c\mathcal{N}_1(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1t/2}),\quad\forall t\in\mathbb{R}_+.\end{aligned} \tag{3-88}$$

由(3-86)-(3-88)我们推导出

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\|Au(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant&\frac{c}{\mu_1^2}\mathcal{N}_1^2(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1t/2})+\frac{1}{\mu_1^2}\|g_0(s)\|^2_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}\\ &+\frac{c+\mu_1}{\mu_1^2}\mathcal{N}_1(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}\mathrm{e}^{-c_1\mu_1t/2}).\end{aligned} \tag{3-89}$$

结合(3-87)-(3-89)我们就得到

$$\begin{aligned}\|\partial_tu\|_{L^2(t,t+1;H)}\leqslant\ &\|Au\|_{L^2(t,t+1;H)}+\|B(u)\|_{L^2(t,t+1;H)}\\ &+\|N(u)\|_{L^2(t,t+1;H)}+\|g(t)\|_{L^2(t,t+1;H)}\\ \leqslant\ &(\frac{c}{\mu_1}+c)\mathcal{N}_1(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}e^{-c_1\mu_1t/2})\\ &+(\frac{c}{\mu_1}+\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}+c)\mathcal{N}_1^{1/2}(\|u\|_{L^\infty(0,1;V)}e^{-c_1\mu_1t/2})\\ &+(1+\frac{1}{\mu_1})\|g_0(s)\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}.\end{aligned} \tag{3-90}$$

由(3-78), (3-89)及(3-90)我们得到(3-60). □

在引理 3.3.5 的基础上，我们构造$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$中的一致正则(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界轨道吸收集.

引理 3.3.6 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+H)$中是平移紧的, 则$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 中存在一致正则(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界(在$\mathcal{M}^b_+$ 范数下)吸收集$\mathcal{I}$, 使得对$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 中的任意有界(在$\mathcal{M}^b_+$ 范数下)集合$\mathcal{B}$, 存在时间$t_1=t_1(\mathcal{B})$ 使得$S(t)(u)\in\mathcal{I}$, $\forall u\in\mathcal{B}$, $\forall t\geqslant t_1$,$\forall g\in\mathcal{H}(g_0)$.

证明. 记

$$\mathcal{I}:=\{u\in\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0}:\|u\|_{\mathcal{M}^b_+}\leqslant\mathcal{N}(2k_2)+\big(1+\frac{1}{\mu_1}\big)\|g_0(s)\|_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)}\},$$

其中k_2是(3-21)中的常数, $\mathcal{N}(\cdot)$是引理 3.3.5 中的连续单调函数. 显然, $\mathcal{I}$是平移半群$\{S(t)\}_{t\geq 0}$在$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$中的一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界吸收集. □

下面我们研究联合正则轨道空间$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 在拓扑空间Ξ^{loc}_+中的封闭性, 这对我们证明一致正则(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)有界吸收集$\mathcal{P}$在拓扑空间Ξ^{loc}_+中的紧性至关重要.

引理 3.3.7 联合正则轨道空间$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$在$\Xi^{loc}_+$ 拓扑下是闭集.

证明. 设$\{u_n\}$ 是$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 中一列(在$\mathcal{M}^b_+$ 范数下)有界集, 且存在函数$u^*\in\mathcal{M}^{loc}_+$, 使得

$$u_n\longrightarrow u^*\quad \text{在}\ \Xi^{loc}_+\ \text{拓扑下收敛}. \tag{3-91}$$

下面分两步证明$u^*\in\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$.

第一步. 证明对任意$T>0$, $\Pi_T u^*$ 是方程(3-1)在$(0,T)$ 上的一个正则弱解. 为此, 我们需要证明$u^*\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;D(A))$, 且$\forall T>0$, $\Pi_T u^*(t)$ 在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;H)$下满足方程(3-1).

事实上, $\{u_n\}\subseteq\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$, 故存在$\{g_n\}\subseteq\mathcal{H}(g_0)$ 使得$\{u_n\}\subseteq\mathcal{J}^+_{g_n}$ 且有

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}+2\mu_1 Au_n+B(u_n)+N(u_n)=g_n(x,t),\ \ n=1,2,3,\cdots. \tag{3-92}$$

与(3-28)相同, 存在$g\in\mathcal{H}(g_0)$使得当$n\to\infty$时, 我们有

$$g_n\longrightarrow g\ \ \text{在}\ \ \mathcal{H}(g_0)\ \ \text{中强收敛}. \tag{3-93}$$

$\{u_n\}$ 在$\mathcal{M}^b_+$ 范数下有界, 所以存在某常数$c>0$ 使得

$$\|u_n\|_{\mathcal{M}^b_+}\leqslant c,\ \ \forall n\in\mathbb{N}_+. \tag{3-94}$$

应用对角线序列法知存在$u\in\mathcal{M}^{loc}_+$ 及$\{u_n\}$ 的某个子列$\{u_{n_k}\}$使得对任意$T>0$, 当$n_k\to\infty$时,

$$\Pi_T u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T u\ \ \text{在}\ \ L^\infty(0,T;V)\ \ \text{中弱}^*\text{收敛}; \tag{3-95}$$

$$\Pi_T u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T u\ \ \text{在}\ \ L^2(0,T;D(A))\ \ \text{中弱收敛}; \tag{3-96}$$

$$\Pi_T\partial_t u_{n_k}\rightharpoonup\Pi_T\partial_t u\ \ \text{在}\ \ L^2(0,T;H)\ \ \text{中弱收敛}. \tag{3-97}$$

由(3-95)-(3-97)得当$n_k \to \infty$时,

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{在 } \Xi_+^{loc} \text{ 拓扑下收敛.} \tag{3-98}$$

应用极限的唯一性及范数的下半连续性得

$$u^* = u \in \mathcal{M}_+^{loc}, \ \|u^*\|_{\mathcal{M}_+^b} \leqslant \liminf_{n_k \to \infty} \|u_{n_k}\|_{\mathcal{M}_+^b} \leqslant c. \tag{3-99}$$

下面证明$\Pi_T u^*$ 在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;H)$ 下满足方程(3-1). 为此, 我们首先证明下面几个收敛关系:

$$\Pi_T u_{n_k} \rightharpoonup \Pi_T u^* \ \text{在 } L^2(0,T;D(A)) \text{ 中弱收敛,} \tag{3-100}$$

$$A\Pi_T u_{n_k} \rightharpoonup A\Pi_T u^* \ \text{在 } L^2(0,T;H) \text{ 中弱收敛,} \tag{3-101}$$

$$B(\Pi_T u_{n_k}) \rightharpoonup B(\Pi_T u^*) \ \text{在 } L^2(0,T;H) \text{ 中弱收敛,} \tag{3-102}$$

$$N(\Pi_T u_{n_k}) \rightharpoonup N(\Pi_T u^*) \ \text{在 } L^2(0,T;H) \text{ 中弱收敛,} \tag{3-103}$$

$$g_{n_k} \longrightarrow g \ \text{在 } \mathcal{H}(g_0) \text{ 中强收敛.} \tag{3-104}$$

显然, (3-100)可由(3-96)直接得到, 由(3-100)知(3-101)成立.

注意到$D(A) \subseteq V \hookrightarrow \mathbb{H}_0^1 \hookrightarrow H$ 是紧嵌入, 根据引理 2.2.4 , 由(3-100)得当$n_k \to \infty$ 时,

$$\Pi_T u_{n_k} \longrightarrow \Pi_T u^* \ \text{在 } L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1) \text{ 中强收敛,} \tag{3-105}$$

$$\Pi_T u_{n_k} \longrightarrow \Pi_T u^* \ \text{在 } L^2(0,T;H) \text{ 中强收敛.} \tag{3-106}$$

对任意的$\phi \in L^2(0,T;H)$, 我们有

$$\lim_{n_k \to \infty} \int_0^T |\langle B(\Pi_T u_{n_k}) - B(\Pi_T u^*), \phi\rangle| \mathrm{d}t \leqslant I_3 + I_4, \tag{3-107}$$

其中

$$I_3 := \lim_{n_k \to \infty} \int_0^T |b(\Pi_T(u_{n_k} - u^*), \Pi_T u_{n_k}, \phi)| \mathrm{d}t, \tag{3-108}$$

$$I_4 := \lim_{n_k \to \infty} \int_0^T |b(\Pi_T u^*, \Pi_T(u_{n_k} - u^*), \phi)| \mathrm{d}t. \tag{3-109}$$

应用索伯列夫嵌入$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^4(\Omega)$ 和$V \hookrightarrow \mathbb{W}^{1,4}(\Omega)$, 根据Hölder 不等式及(3-94)式

得到

$$\begin{aligned}
I_3 &\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{\mathbb{L}^4}\|\nabla\Pi_T u_{n_k}\|_{\mathbb{L}^4}\|\phi\|\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{1,2}\|\Pi_T u_{n_k}\|_V\|\phi\|\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)}\|\phi\|_{L^2(0,T;H)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3-110}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
I_4 &\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T u^*\|_\infty\|\nabla\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|\|\phi\|\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T \|\Pi_T u^*\|_V\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{1,2}\|\phi\|\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{L^2(0,T;\mathbb{H}_0^1)}\|\phi\|_{L^2(0,T;H)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3-111}$$

由(3-107)-(3-111)得(3-102)成立. (3-100)表明范数$\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{L^2(0,T;D(A))}$ 有界. 与 [36, (3.27)]的推导类似, 我们推导出

$$\begin{aligned}
&\lim_{n_k\to\infty}\left|\int_0^T\langle N(\Pi_T u_{n_k})-N(\Pi_T u^*),\phi\rangle\mathrm{d}t\right| \\
&=\left|\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\{\nabla\cdot[\mu(\Pi_T u_{n_k})e(\Pi_T u_{n_k})-\mu(\Pi_T u^*)e(\Pi_T u^*)]\}\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|^{1/2}(\|\Pi_T u_{n_k}\|_{D(A)}^{1/2}+\|\Pi_T u^*\|_{D(A)}^{1/2})\|\phi\|\mathrm{d}t \\
&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\|\Pi_T(u_{n_k}-u^*)\|_{L^2(0,T;H)}^{1/2}\|\phi\|_{L^2(0,T;H)} \\
&=0,
\end{aligned} \tag{3-112}$$

事实上, 上式的推导我们还用了(3-94). (3-112)意味着(3-103)成立. (3-104)由(3-93)直接得到. 结合(3-97)及(3-100)-(3-104)我们就得到

$$\frac{\partial\Pi_T u^*}{\partial t}+2\mu_1 A\Pi_T u^*+B(\Pi_T u^*)+N(\Pi_T u^*)=g \tag{3-113}$$

在$L^2(0,T;H)$中成立. 而$L^2(0,T)\subset\mathcal{D}'(0,T)$, 故$\Pi_T u^*$在分布意义$\mathcal{D}'(0,T;H)$下满足方程(3-1).

第二步. 证明$\Pi_T u^*$满足能量不等式(3-46). 对任意$\phi(s)\in\mathcal{C}_0^\infty([0,T])$, $\phi(s)\geqslant 0$,

$$\Big|\int_0^T\big\langle\Pi_T u_{n_k}(s),A\Pi_T u_{n_k}(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s-\int_0^T\big\langle\Pi_T u^*(s),A\Pi_T u^*(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s\Big|$$
$$\leqslant I_5+I_6, \tag{3-114}$$

成立, 其中

$$I_5:=\Big|\int_0^T\big\langle\Pi_T u_{n_k}(s)-\Pi_T u^*(s),A\Pi_T u_{n_k}(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s\Big|, \tag{3-115}$$

$$I_6:=\Big|\int_0^T\big\langle\Pi_T u^*(s),A\Pi_T u_{n_k}(s)-A\Pi_T u^*(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s\Big|. \tag{3-116}$$

(3-101)表明$\|A\Pi_T u_{n_k}\|_{L^2(0,T;H)}$是有界的. 因此,由(3-106)得

$$\begin{aligned}\lim_{n_k\to\infty}I_5&=\lim_{n_k\to\infty}\Big|\int_0^T\big\langle\Pi_T u_{n_k}(s)-\Pi_T u^*(s),A\Pi_T u_{n_k}(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s\Big|\\&\leqslant c\lim_{n_k\to\infty}\Big(\int_0^T\|\Pi_T u_{n_k}(s)-\Pi_T u^*(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T\|A\Pi_T u_{n_k}(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\&=0.\end{aligned} \tag{3-117}$$

由(3-101)我们可直接得到

$$\lim_{n_k\to\infty}I_6=\lim_{n_k\to\infty}\Big|\int_0^T\big\langle\Pi_T u^*(s),A\Pi_T u_{n_k}(s)-A\Pi_T u^*(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s\Big|=0. \tag{3-118}$$

结合(3-114)-(3-118)我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\big\langle\Pi_T u_{n_k}(s),A\Pi_T u_{n_k}(s)\big\rangle\phi'(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^T\big(\Pi_T u^*(s),A\Pi_T u^*(s)\big)\phi'(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3-119}$$

由(3-91)及(3-100)推出$A\Pi_T u_{n_k}(\cdot)\sqrt{\phi(\cdot)}\rightharpoonup A\Pi_T u^*(\cdot)\sqrt{\phi(\cdot)}$弱收敛于$L^2(0,T;H)$, 应用函数的下半连续性我们得到

$$\int_0^T\|A\Pi_T u^*(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant\liminf_{n_k\to\infty}\int_0^T\|\Pi_T A u_{n_k}(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s. \tag{3-120}$$

应用与 [36, Lemmas 3.1 和3.2]相同的证明方法, 我们可以证明

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\langle B(\Pi_T u_{n_k}(s)), A\Pi_T u_{n_k}(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^T\langle B(\Pi_T u^*(s)), A\Pi_T u^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s, \tag{3-121}$$

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\langle N(\Pi_T u_{n_k}(s)), A\Pi_T u_{n_k}(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^T\langle N(\Pi_T u^*(s)), A\Pi_T u^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s. \tag{3-122}$$

对于外力项$\{g_{n_k}(s)\}\subset\{g_n(s)\}$, 我们有

$$\Big|\int_0^T\big(g_{n_k}(s), A\Pi_T u_{n_k}(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s-\int_0^T\big(g(s), A\Pi_T u^*(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s\Big|$$
$$\leqslant\Big|\int_0^T\big(g_{n_k}(s)-g(s), A\Pi_T u_{n_k}(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s\Big|$$
$$+\Big|\int_0^T\big(g(s), A\Pi_T u_{n_k}(s)-A\Pi_T u^*(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s\Big|$$
$$\leqslant I_7+I_8, \tag{3-123}$$

其中

$$I_7:=c\Big(\int_0^T\|g_{n_k}(s)-g(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T\|A\Pi_T u_{n_k}(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}, \tag{3-124}$$

$$I_8:=\Big|\int_0^T\langle g(s), A\Pi_T u_{n_k}(s)-A\Pi_T u^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s\Big|. \tag{3-125}$$

由(3-104)及(3-101)推导出当$n_k\to\infty$时,

$$I_7\longrightarrow 0, \tag{3-126}$$
$$I_8\longrightarrow 0. \tag{3-127}$$

因此, 由(3-123)-(3-127)可得

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_0^T\big(g_{n_k}(s), A\Pi_T u_{n_k}(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s=\int_0^T\big(g(s), A\Pi_T u^*(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s. \tag{3-128}$$

由于$\Pi_T u_{n_k}(t) \in \mathcal{T}^+_{g_{n_k}}$, $\Pi_T u_{n_k}(t)$ 满足能量不等式(3-46), 即

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^T (\Pi_T u_{n_k}(s), A\Pi_T un_k(s))\phi'(s)\mathrm{d}s + 2\mu_1 \int_0^T \|A\Pi_T u_{n_k}(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^T \langle B(\Pi_T u_{n_k}(s)), A\Pi_T u_{n_k}(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s + \int_0^T \langle N(\Pi_T u_{n_k}(s)), A\Pi_T u_{n_k}(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s \\
\leqslant &\int_0^T \big(g(s), A\Pi_T u_{n_k}(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3-129}
$$

应用(3-119)-(3-122) 及(3-128), 在(3-129)中取极限, 我们就得到

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^T (u^*(s), Au^*(s))\phi'(s)\mathrm{d}s + 2\mu_1 \int_0^T \|Au^*(s)\|^2\phi(s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^T \langle B(u^*(s)), Au^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s + \int_0^T \langle N(u^*(s)), Au^*(s)\rangle\phi(s)\mathrm{d}s \\
\leqslant &\int_0^T \big(g(s), Au^*(s)\big)\phi(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3-130}
$$

综合第一部和第二部的结果就得到$u^* \in \mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$. □

引理 3.3.8 引理 3.3.6 中的一致(关于$g \in \mathcal{H}(g_0)$)正则有界吸收集$\mathcal{I}$ 在Ξ^{loc}_+ 拓扑下是紧集.

证明. 设$\{u_n\} \subset \mathcal{I}$是一有界(在$\mathcal{M}^b_+$范数下)序列. 由对角线序列法知存在函数$u \in \mathcal{M}^{loc}_+$及$\{u_n\}$的某个子列$\{u_{n_k}\}$, 使得$u_{n_k} \longrightarrow u$在$\Xi^{loc}_+$拓扑下收敛. 由引理 3.3.7 得$u \in \mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$. 应用范数的下半连续性可得

$$
\|u\|_{\mathcal{M}^b_+} \leqslant \liminf_{n_k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{\mathcal{M}^b_+} \leqslant \mathcal{N}(2k_2) + \big(1+\frac{1}{\mu_1}\big)\|g_0(s)\|_{L^2_b(\mathbb{R}_+;H)}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{3-131}
$$

其中$\mathcal{N}(\cdot)$ 是引理 3.3.5 中的连续单调函数. 这样我们就得到$u \in \mathcal{I}$. □

下面给出本节的主要结论.

定理 3.3.1 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$中是平移紧的, 任意$g \in \mathcal{H}(g_0)$. (3-48)定义的平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\Xi^{loc}_+$拓扑下存在一致(关于$g \in \mathcal{H}(g_0)$)正则轨道吸引子$\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)} \subset \mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)} \cap \mathcal{I}$, 满足:

(i) (有界性与紧性) $\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 在$\mathcal{M}^b_+$ 范数下是有界集, 在Ξ^{loc}_+ 拓扑下是紧集;

(ii) (不变性) $S(t)\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}=\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$, $\forall t\geqslant 0$;

(iii) (一致吸引性) 在Ξ_+^{loc} 拓扑下, $\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$是$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$中的一致(关于$g\in\mathcal{H}(g_0)$)吸引集, 使得对于任意$\mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$中有界(在$\mathcal{M}_+^b$范数下)集$\mathcal{B}$及$\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$的任意邻域$\mathcal{O}(\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)})$, 存在时间$t^*=t^*(\mathcal{B},\mathcal{O}(\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}))$, 使得$S(t)\mathcal{B}\subset\mathcal{O}(\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)})$, $\forall t\geqslant t^*$.

证明. 应用 [11, 定理XIV.3.1], 引理 3.1.1, 引理 3.3.2(ii), 引理 3.3.6, 引理 3.3.7, 引理 3.3.8, 就得到结论. □

3.4 轨道渐近光滑效应

在本节中, 我们首先证明以空间$\mathcal{F}_+^{loc}$中的有界(在$\mathcal{F}_+^b$范数下)集合$\mathcal{B}$中的点u_0为初值的解$S(t)u_0$经过充分长的时间后将进入空间$\mathcal{M}_+^{loc}$中的有界(在$\mathcal{M}_+^b$范数下)集. 然后我们证明$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}\subseteq\mathcal{F}_+^{loc}=\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}\subseteq\mathcal{M}_+^{loc}$, 此式表明了不可压非牛顿流方程组(3-1) -(3-2)解的轨道渐近光滑效应: 以$u_0\in H\subseteq\mathcal{F}_+^{loc}$为初值的解在半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$的作用下, 经过充分长的时间之后进入$\mathcal{M}_+^{loc}$.

引理 3.4.1 设g_0在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ 中是平移紧的, 任意$g\in\mathcal{H}(g_0)$. $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$ 是空间$\mathcal{F}_+^b$ 中的有界集, 则对以$u_0\in\mathcal{B}$ 为初值的解$u(\cdot)=S(t)u_0$, 存在时间$t_0(\mathcal{B})$ 和一个正常数K 使得

$$\|S(t)u_0\|_{\mathcal{M}_+^b}\leqslant K,\ \ \forall t\geqslant t_0(\mathcal{B}). \tag{3-132}$$

证明. 对于空间$\mathcal{F}_+^b$ 中的有界集合$\mathcal{B}$, $u_0\in\mathcal{B}$, 应用(3-14)和(3-15)可推导出, 存在$t_0(\mathcal{B})$ 使得

$$\|u(t)\|^2\leqslant\frac{2}{3\mu_1c_1}\big(1+\frac{1}{\mu_1c_1}\big)\|g_0(s)\|^2_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)},\ \ \forall t\geqslant t_0(\mathcal{B}). \tag{3-133}$$

应用(3-133)及与 [38, (5.1)]类似的证明方法, 我们得到

$$\|u(t)\|_V\leqslant K_1,\ \ \forall t\geqslant t_0(\mathcal{B}), \tag{3-134}$$

其中K_1是一个正常数. 由(3-52), (3-54)及(3-134)可以推导出

$$\int_t^{t+1}\|B(u(s))\|^2\mathrm{d}s\leqslant c\|u\|^4_{L^\infty(t_0(\mathcal{B}),+\infty;V)}\leqslant cK_1^4,\ \ \forall t\geqslant t_0(\mathcal{B}), \tag{3-135}$$

$$\int_t^{t+1}\|N(u(s))\|^2\mathrm{d}s\leqslant c\|u\|^2_{L^\infty(t_0(\mathcal{B}),+\infty;V)}\leqslant cK_1^2,\ \ \forall t\geqslant t_0(\mathcal{B}). \tag{3-136}$$

结合(3-86)及(3-135)-(3-136)可得

$$\int_t^{t+1}\|Au(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{c}{\mu_1^2}K_1^4+\frac{c+\mu_1}{\mu_1^2}K_1^2+\frac{1}{\mu_1^2}\|g_0(s)\|^2_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)},\ \ \forall t\geqslant t_0(\mathcal{B}). \tag{3-137}$$

结合方程(3-1), 对$\forall t \geqslant t_0(\mathcal{B})$, 应用估计(3-135)-(3-137)得

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u\|_{L^2(t,t+1;H)} \\
&\leqslant \|Au\|_{L^2(t,t+1;H)} + \|B(u)\|_{L^2(t,t+1;H)} + \|N(u)\|_{L^2(t,t+1;H)} + \|g(t)\|_{L^2(t,t+1;H)} \\
&\leqslant (\frac{c}{\mu_1}+c)K_1^2 + (\frac{c}{\mu_1}+\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}+c)K_1 + (1+\frac{1}{\mu_1})\|g_0(s)\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+;H)}.
\end{aligned} \tag{3-138}$$

考虑(3-134),(3-137)-(3-138)就得到(3-132). □

现在我们记$H^\eta := (-\Delta)^{-\eta/2}$ ($\eta > 0$且拉普拉斯算子Δ 满足零边界条件, 即$u|\partial\Omega = 0$). $H^{-\eta}$ 表示H^η的对偶空间. 在下面的部分, 我们取$0 < \eta \leqslant 2$, 从而$H \hookrightarrow H^{-\eta}$, $V \hookrightarrow H^{2-\eta}$ 均是紧嵌入. 与 [10, p.281]类似, 我们知道空间Θ_+^{loc}中的拓扑比$\mathcal{C}([0,T];H^{-\eta})$中的一致收敛拓扑强, 空间$\Xi_+^{loc}$中的拓扑强于$\mathcal{C}([0,T];H^{2-\eta})$ 中的一致收敛拓扑. 因此, 作为定理 3.2.1 及定理 3.3.1 的推论, 我们有如下结论:

引理 3.4.2 设g_0 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ 中是平移紧的, 则

(i) 对于空间$\mathcal{F}_+^b$ 中的任意有界集合$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$, 当$t \to +\infty$时

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{-\eta})}(\Pi_T S(t)\mathcal{B}, \Pi_T \mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}) \longrightarrow 0. \tag{3-139}$$

(ii) 对于空间$\mathcal{M}_+^b$ 中的任意有界集合$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}^+_{\mathcal{H}(g_0)}$, 当$t \to +\infty$ 时

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{2-\eta})}(\Pi_T S(t)\mathcal{B}, \Pi_T \mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}) \longrightarrow 0. \tag{3-140}$$

下面应用引理 3.4.1 及引理 3.4.2 证明一致轨道吸引子的正则性.

定理 3.4.1 设g_0 在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ 中是平移紧的, 则

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)} = \mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}. \tag{3-141}$$

证明. 一方面, 一致正则轨道吸引子$\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 在$\mathcal{M}_+^b$ 中有界. 从而, 任意$t \in \mathbb{R}_+$, $S(t)\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 在$\mathcal{F}_+^b$ 中有界. 对任意$T > 0$, 由一致正则轨道吸引子$\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 的不变性及(3-139)可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{-\eta})}\left(\Pi_T \mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}, \Pi_T \mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}\right) \\
&= \operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{-\eta})}\Big(\Pi_T S(t)\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}, \Pi_T \mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}\Big) \ (\forall t \in \mathbb{R}_+) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{-\eta})}\left(\Pi_T S(t)\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}, \Pi_T \mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}\right). \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3-142}$$

这表明

$$\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}. \tag{3-143}$$

另一方面, 由一致轨道吸引子$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 的不变性, 我们得到

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)} = S(t_0(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}))\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)} \tag{3-144}$$

在$\mathcal{M}_+^b$ 有界, 其中$t_0(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)})$ 来自于引理 3.4.1. 类似地, 对任意$T > 0$, 应用一致轨道吸引子$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}$ 的不变性及(3-140)可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{2-\eta})}\left(\Pi_T\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}, \Pi_T\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}\right)\\
&= \operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{2-\eta})}\left(\Pi_T S(t)\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}, \Pi_T\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}_+\\
&= \lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}_{\mathcal{C}([0,T];H^{2-\eta})}\left(\Pi_T S(t)\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)}, \Pi_T\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}\right)\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3-145}$$

这表明

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}. \tag{3-146}$$

由(3-143)及(3-146)我们就得到(3-141). □

3.5 小结与说明

本章主要研究了非自治情形下不可压非牛顿流方程组在三维有界区域上解的轨道渐近行为. 我们首先引入了外力项函数$g(x,t)$所属的符号空间$\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$, 其中$g_0$在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中是平移紧的, 即$\mathcal{H}(g_0)$在$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$中是紧集. 然后我们分别证明了非牛顿流方程组(3-1)-(3-2) 的一致(关于$g(x,t) \in H(g_0)$)轨道吸引子$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ 及一致(关于$g(x,t) \in \mathcal{H}(g_0)$)正则轨道吸引子$\mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)} \subset \mathcal{M}_+^{loc}$ 的存在性, 其中空间$\mathcal{M}_+^{loc}$比$\mathcal{F}_+^{loc}$ 的正则性更高. 最后, 我们证明了以空间$\mathcal{F}_+^b$ 中的有界集中的点u_0 为初值的解在半群的作用下, 经过充分长的时间之后进入$\mathcal{M}_+^b$中的有界集. 在此基础上, 我们证明了$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(g_0)} = \mathcal{U}_{\mathcal{H}(g_0)}$, 此式表明了方程组(3-1)-(3-2)解的轨道渐近光滑效应: 解(属于$\mathcal{M}_+^{loc}$)在相应平移半群的作用下比初值(属于$\mathcal{F}_+^{loc}$)更光滑.

这里我们要指出的是, 当$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界光滑区域时, 用与本章相似的方法可以证明非自治不可压非牛顿流方程组(3-1)-(3-2)的一致轨道吸引子的存在性以及正则性, 得到与定理 3.2.1 , 定理 3.3.1 , 定理 3.4.1 类似的结果. 我们也可以得到二维自治情形下方程组(2-15)-(2-16) 轨道吸引子的存在性与正则性, 并可由该结果结合相关函数空间的嵌入推出文 [39]及文 [40]的结果, 类似讨论见 [11].

第四章 结束语

本硕士论文研究了一类三维不可压非牛顿流方程组解的轨道渐近行为, 分别证明了自治情形下轨道吸引子的存在性和非自治情形下一致轨道吸引子的存在性及正则性.

第二章证明了自治的三维不可压非牛顿流方程组轨道吸引子的存在性. 我们利用文 [31]或文 [11]中的经典方法和结论, 首先给出自治方程组(2-15)-(2-16)弱解的具体定义及存在性, 构造它的轨道空间$\mathcal{T}^+$ 并引入作用在$\mathcal{T}^+$ 上的自然平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. 然后我们给出了轨道空间$\mathcal{T}^+$的一些相关性质, 关键是构造了半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在轨道空间$\mathcal{T}^+$ 中的有界吸收集$\mathcal{P}$以及证明此吸收集在拓扑空间Θ_+^{loc} 中的紧性. 最后得到平移半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在轨道空间$\mathcal{T}^+$中存在轨道吸引子.

第三章考虑了非自治的不可压非牛顿流方程组在三维有界区域上解的轨道渐近行为. 首先, 我们引入外力项函数$g(x,t)$所属的符号空间$\Sigma = \mathcal{H}(g_0)$. 然后, 利用文 [11] 中的经典方法和结论证明了非自治方程组(3-1)-(3-2) 在空间$\mathcal{F}_+^{loc}$ 中存在一致轨道吸引子并且在具有更高正则性的空间$\mathcal{M}_+^{loc}$ 中也存在一致轨道吸引子(称为一致正则轨道吸引子). 最后我们证明了上述两个一致轨道吸引子相等, 即表明了非自治非牛顿流方程组(3-1)-(3-2)解的轨道渐近光滑效应: 以$u_0 \in \mathcal{F}_+^b$为初值的解在半群的作用下, 经过充分长的时间之后进入$\mathcal{M}_+^b$, 即解最终比初值更光滑.

事实上, 当$\Omega \subset \mathbb{R}^2$是有界光滑区域时, 用与本章相似的方法可以研究自治不可压非牛顿流方程组(2-15)-(2-16) 及非自治不可压非牛顿流方程组(3-1)-(3-2)的轨道渐近行为, 得到与本文类似的结果, 并可由该结果结合相关函数空间的嵌入推出文 [39]及文 [40]在较弱的拓扑下得到的结果. 对于研究无穷维动力系统中轨道吸引子或一致轨道吸引子的存在性, 关键问题之一是要证明作用在轨道空间上的平移半群存在轨道吸收集(非自治情形下为一致轨道吸收集)及此吸收集在相应拓扑空间中的紧性, 这就要求我们对方程组的解做出正确的估计. 到目前为止, 已有不少的学者对微分方程组解的轨道渐近行为进行了研究, 并得到很多抽象的结果和具体的应用, 相关的文献和专著见 [10, 11, 30, 34, 39].

参考文献

[1] Adams R. A.. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

[2] H. O. Bae.. Existence, regularity and decay rate of solutions of non-Newtonian flow[J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, 231: 467-491.

[3] Bellout H. Bloom F., Nečas J.. Young measure-valued solutions for non-Newtonian incompressible viscous fluids[J]. Comm. PDE., 1994, 19(11): 1763-1803.

[4] Ball J. M.. Continuity properties of global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations[J]. J. Nonl. Sci., 1997, 7: 475-502.

[5] F. Bloom, W. Hao.. Regularization of a non-Newtonian system in an unbounded channel: Existence of a maximal compact attractor[J]. Nonlinear Anal., 2001, 43(6): 743-766.

[6] Bloom F., Hao W.. Regularization of a non-Newtonian system in an unbounded channel: Existence and uniqueness of solutions[J]. Nonlinear Anal., 2001, 44(3): 281-309.

[7] Caraballo T., Langa J., Valero J.. Global attractors for multivalued random semiflows generated by random differential inclusions with additive noise[J]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, 2001, 332: 131-136.

[8] Caraballo T., Langa J., Melnik V., Valero J.. Pullback attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems[J]. Set-Valued Anal., 2003, 11: 153-201.

[9] Caraballo T., Kloeden P. E., Rubio P. M.. Weak pullback attractors of setvalued processes[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 288: 692-707.

[10] Chepyzhov V. V., Vishik M. I.. Evolution equations and their trajectory attractors[J]. J. Math. Pures Appl., 1997, 76: 913-664.

[11] Chepyzhov V. V., Vishik M. I.. Attractors for Equations of Mathematical Physics[M]. AMS, R.I., 2002.

[12] Caraballo T., Langa J., Valero J.. Global attractors for multivalued random dynamical systems generated by random differential inclusions with multiplicative noise[J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, 260: 602-622.

[13] Caraballo T., M-Rubio P., Robinson J.. A comparison between two theories for multivalued semiflows and their asymptotic behavior[J]. Set-Valued Anal., 2003, 11: 297-322.

[14] Dong B., Chen Z.. Time decay rates of non-Newtonian flows in $\mathbb{R}^n_+$[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 324: 820-833.

[15] Dong B., Jiang W.. On the decay of higher order derivatives of solutions to Ladyzhenskaya model for incompressible viscous flows[J]. Sci. China ser. A: Math., 2008, 51: 925-934.

[16] Guo B., Zhu P.. Partial regularity of suitable weak solution to the system of the incompressible non-Newtonian fluids[J]. J. Differential Equations, 2002, 178: 281-297.

[17] Guo B., Lin G., Shang Y.. Dynamics of Non-Newtonian fluid[M]. National Defence Industry Press, Beijing, 2006.

[18] Guo B., Guo C.. The convergence for non-Newtonian fluids to Navier-Stokes equations in 3D domain[J]. Inter. J. Dyna. Syst. Diff. Equa., 2009, 2: 129-138.

[19] Kapustyan A. V., Valero J.. Weak and strong attractors for the 3D Navier-Stokes system[J]. J. Differential Equations, 2007, 240: 249-278.

[20] Ladyzhenskaya O.. Attractors for Semigroups and Evolution Equations [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[21] Ladyzhenskaya O.. New equations for the description of the viscous incompressible fluids and solvability in large of the boundary value problems for them, in Boundary Value Problems of Mathematical Physics[M], AMS, R.I., 1970.

[22] Li Y., Zhao C.. Global attractor for a non-Newtonian system in two-dimensional unbounded domains[J]. Acta. Anal. Funct. Appl., 2002, 4: 343-349.

[23] Málek J., Nečas J., Rokyta M., Růžička M.. Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs[M]. Champman-Hall, New York, 1996.

[24] Melnik V. S., Valero J., On attractors of multi-valued semi-flows and differential inclusions[J]. Set-Valued Anal., 1998, 6: 83-111.

[25] Pokorný M.. Cauchy problem for the non-Newtonian viscous incompressible fluids[J]. Appl. Math., 1996, 41: 169-201.

[26] Robinson J. C.. Infinite-Dimensional Dynamical Systems [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[27] Sell G., You Y.. Dynamics of Evolutionary Equations [M]. NewYork: Springer, 2002, 143.

[28] Melnik V., Valero J.. On global attractors of multivalued semiprocess and nonautonomous evolution inclusionsInfinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[J]. Set-Valued Anal., 2000, 8: 375-403.

[29] Temam R.. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. 2ed., Springer, Berlin, 1997.

[30] Vishik M. I., Chepyzhov V. V.. Trajectory and global attractors of three-dimensional Navier-Stokes systems[J]. Math. Notes, 2002, 77: 177-193.

[31] Vishik M. I., Chepzhov V. V.. Trajectory attractors of equations of mathematical physics[J]. Russian Math. Surveys, 2011, 4: 639-731.

[32] Wang Y., Zhou S.. Kernel sections and uniform attractors of multi-valued semiprocesses[J]. J.Differential Equations, 2007, 232: 573-622.

[33] Zhao C.. Pullback asymptotic behavior of solutions fora non-autonomous non-Newtonian fluid on 2D unbounded domains[J]. J. Math. Phys., 2012, 12: 1-21.

[34] Zhao C., Kong L., Zhao M.. The trajectory attractor and its limiting behavior for the convective Brinkman-Forchheimer equations[J]. Topological Method Nonlinear Anal., article in press.

[35] Zhao C., Li Y.. A note on the asymptotic smoothing effect of solutions to a non-Newtonian system in 2D unbounded domains[J]. Nonl. Anal., 2005, 60: 475-483.

[36] Zhao C., Li Y.. H^2-compact attractor for a non-Newtonian system in two-dimensional unbounded domains[J]. Nonl. Anal., 2004, 56: 1091-1103.

[37] Zhao C., Liu G., Wang W.. Smooth pullback attractors for a non-autonomous 2D non-Newtonian fluid and their tempered behavior[J]. J. Math. Fluid Mech., DOI: 10.1007/s00021-013-0153-2.

[38] Zhao C., Zhou S.. Pullback attractors for nonautonomous incompressible non-Newtonian fluid[J]. J. Differential Equations, 2007, 238: 394-425.

[39] Zhao C., Zhou S., Li Y.. Trajectory attractor and global attractor for a two-dimensional incompressible non-Newtonian fluid[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 325: 1350-1362.

[40] Zhao C., Li Y., Zhou S.. Regularity of trajectory attractor and upper semicontinuity of global attractor for a 2D non-Newtonian fluid[J]. J. Differential Equations, 2009, 247: 2331-2363.

[41] Zhao C., Zhou S., Li Y.. Existence and regularity of pullback attractors for an incompressible non-Newtonian fluid with delays[J]. Quart. Appl. Math., 2009, 61: 503-540.

[42] Zhao C.. Approximation of the incompressible non-Newtonian fluid equations by the artificial compressibility method[J]. Math. Meth. Appl. Sci., article in press.

致　谢

本论文是在导师赵才地副教授的精心指导下完成的, 从学位论文的选题到具体研究及论文撰写, 修改的全过程, 赵老师倾注了大量的心血. 赵老师严谨的科研思路, 实事求是的治学态度, 渊博的学识, 敬业的精神, 对科研工作敏锐的洞察能力是我毕生学习的楷模. 在此, 对赵老师三年来对我学术上的精心指导与生活上的关怀表示最崇高的敬意和最衷心的感谢.

感谢一直关心与支持我的师弟, 师妹, 感谢刘国威, 李春秋, 孔蕾, 你们在论文方面给予我极大的帮助. 感谢2011级数研的全体同学, 在此, 向他们深表感谢.

这三年里, 还要感谢温州大学数学与信息科学学院为我提供的良好的学习环境和学术氛围. 感谢王玮明教授, 赵焕光教授, 王幼斌教授等老师在专业知识方面对我的教导与帮助.

在此还要感谢我生活学习了三年的母校温州大学, 母校给了我一个宽阔的学习平台, 让我不断吸取新知, 充实自己.

需要特别感谢的是我的父母. 父母的养育之恩无以为报, 他们是我十多年求学路上的坚强后盾, 感谢他们在我求学生涯中默默地支持和无私的关怀, 他们的鼓励和支持, 是我生活和学习动力的源泉.

最后, 我还要衷心地感谢参加我论文的审查, 评阅和答辩的各位专家和老师!

吴鹤灵

二零一四年三月

攻读学位期间科研项目与学术论文

[1] 国家自然科学基金面上项目：流体力学中几类非线性偏微分方程组的动力学行为（项目代码：11271290），2013-2016.（项目组成员）

[2] 赵才地, **吴鹤灵**, 李楚进. 一类不可压三维非牛顿流的轨道吸引子,《数学学报》, 已录用, 待发表.